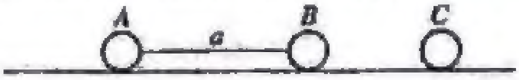
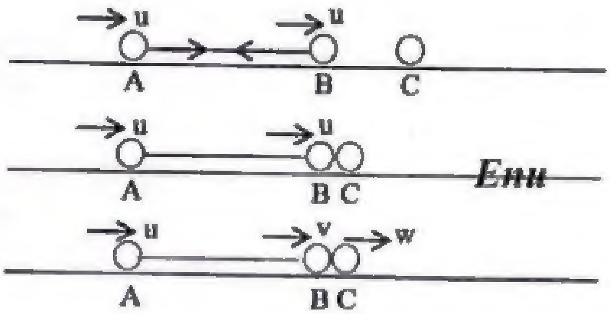
1. එක එකක ස්කන්ධය m වූ A, B හා C අංශු තුනක් සුමට තිරස් මේසයක් මත සරල රේඛාවක A හා B එකිනෙකට a දුරින්, දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් යා කර රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි තබා ඇත.



B අංශුවට $\overrightarrow{AB}$ දිශාවට ආවේගයක් දෙනු ලබන්නේ ආවේගයෙන් මොහොතකට පසුව B හි ප්‍රවේගය u වන පරිදි ය. C සමග ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු, B හි ප්‍රවේගය $\overrightarrow{AB}$ දිශාවට $\frac{1}{2}(1-e)u$ බව පෙන්වන්න; මෙහි e යනු B හා C අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය වේ.
මෙම ගැටුමෙන් පසුව, A ට B සමග ගැටීම සඳහා ගතවන කාලය ද සොයන්න.

5



පෙර $\rightarrow u_1$ $\rightarrow u_2$
(A) (B).
පසු $\rightarrow v_1$ $\rightarrow v_2$.
$V_2 - V_1 = e(u_1 - u_2)$

A සහ C සඳහා $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්,

$\longrightarrow \quad 0 = mv + mw - mu$ $\cancel{5}$

$\therefore v + w = u$ .... (1) 5

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමය යෙදීමෙන්,

$w - v = eu$ .... (2) 5

$\bigcirc \rightarrow v \quad \overset{\rightarrow u}{\underset{w}{\bigcirc}}$.
$\rightarrow -w - v = eu$.
$w + v = -eu$.

$(1) - (2) : 2v = u - eu$

$\therefore v = \frac{1}{2}(1-e)u$ 5

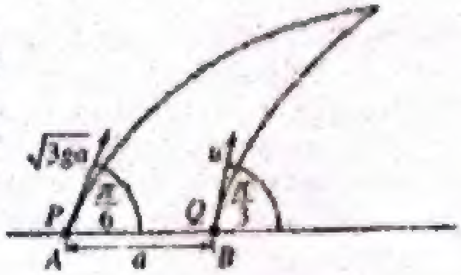
අවශ්‍ය කාලය $= \dfrac{a}{u-v}$

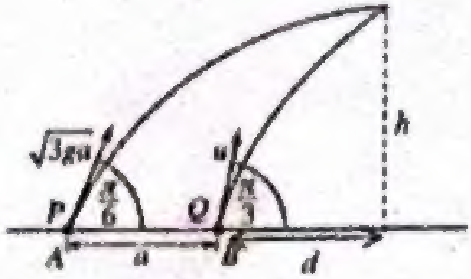
$= \dfrac{2a}{(1+e)u}$. 5

$V_{A,B} = u - v$.

25

2. A [illegible] B [illegible] $AB = a$ [illegible] P [illegible] Q [illegible] A [illegible] B [illegible] AB [illegible] T [illegible] P [illegible] Q [illegible]
$u = \sqrt{ga}$ [illegible] T [illegible] a [illegible] g [illegible]





$s = ut + \frac{1}{2}at^2$:

$P \uparrow \quad h = \sqrt{3ga} \cdot \frac{1}{2} \; T - \frac{1}{2}gT^2$ .... (1) (5)

$Q \uparrow \quad h = u \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot T - \frac{1}{2}gT^2$ ···Enu··· (2) (5)

(1) – (2): $u\frac{\sqrt{3}}{2}T = \sqrt{3ga} \cdot \frac{1}{2}T$ (5)

$\Rightarrow u = \sqrt{ga}$

$P \longrightarrow \quad a + d = \sqrt{3ga}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,T$ — (3)

(5) (for both)

$Q \longrightarrow \quad d = \sqrt{ag} \cdot \frac{1}{2} \cdot T$ — (4)

(3)–(4) ⇒ $\therefore a + \frac{\sqrt{ag}}{2}\,T = 3\frac{\sqrt{ag}}{2}\,T$

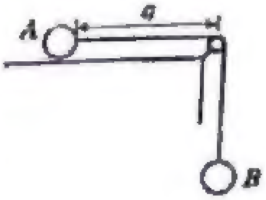
$\Rightarrow a = 2\frac{\sqrt{ag}}{2}\,T$

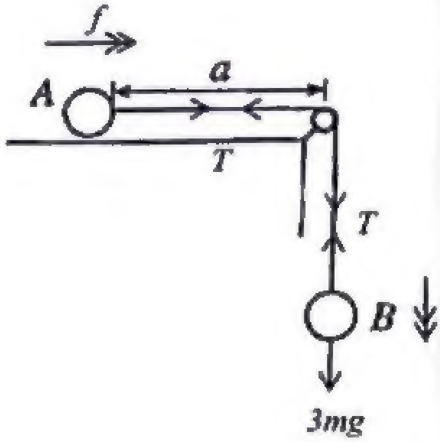
$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{a}{g}}$ (5)

25

Enu

3. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $3m$ වූ A හා B අංශු දෙකක් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක කෙළවරවලට ඈඳා ඇත. A අංශුව තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලතාවයේ අල්වා තබා ඇති අතර මේසයේ දාරයට සවි කළ සුමට කුඩා කප්පියක් මතින් තන්තුව දමා ඇත. B අංශුව කප්පියට සිරස්ව පහළින් එල්ලෙයි. A අංශුව කප්පියේ සිට a දුරකින් ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. පසුව එහි චලිතයේදී A මත විශාලත්වය $\frac{1}{2}mg$ වූ නියත ඝර්ෂණ බලයක් ක්‍රියාකරයි.
A හි ත්වරණය සොයන්න.
A කප්පියට ළඟාවන විට A හි වේගය ද සොයන්න.





$\vec{F} = m\vec{a}$

$B \quad : \downarrow 3mg - T = 3mf$ ....(1) 5

$A \quad : \rightarrow T - \frac{1}{2}mg = mf$ ..Enu....(2) 5

$(1) - (2): \quad \frac{5}{2}mg = 4mf$

$f = \frac{5}{8}g$ 5

$v^2 = u^2 + 2as:$

$v^2 = 2fa.$ 5

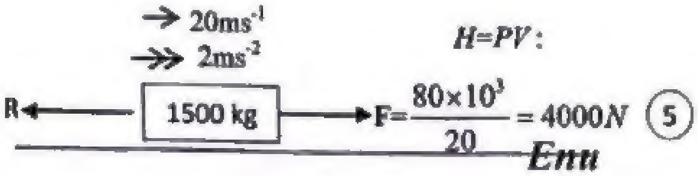
$\therefore v^2 = 2 \times \frac{\sqrt{5ag}}{8}.$

$\therefore v = \frac{\sqrt{5ag}}{2}.$ 5

25

Enu

4. ස්කන්ධය 1500 kg වූ කාරයක් 80 kW නියත ජවයකින් ක්‍රියා කරමින් නියත ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව තිරස් මාර්ගයක් ඔස්සේ චලනය වේ. කාරය 20 m s^{-1} වේගයකින් චලනය වන විට එහි ත්වරණය 2 m s^{-2} වේ. කාරය, තිරසට $\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ ක ආනතියක් සහිත මාර්ගයක් දිගේ ඉහළට 8 m s^{-1} වේගයකින් එම නියත ජවයෙන්ම ක්‍රියා කරමින් එම නියත ප්‍රතිරෝධයට එරෙහිව චලනය වන විට එහි ත්වරණය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.



$$F = \frac{80\times10^3}{20} = 4000N$$

$\vec{F} = m\vec{a}$: $\rightarrow 4000 - R = 1500 \times 2$ (5)

$\therefore R = 1000N$

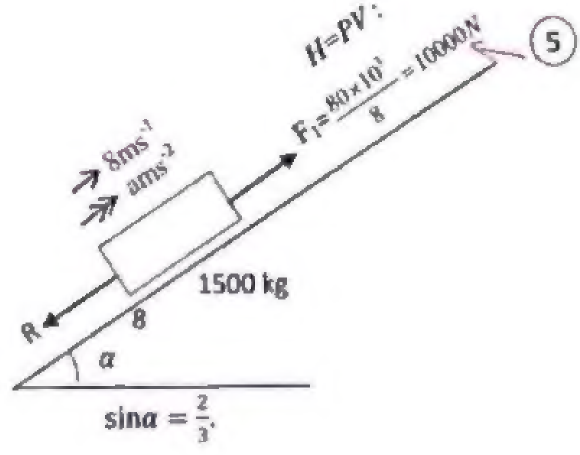
F=ma:

$$10000 - 1000 - 1500\times\frac{2}{3}g = 1500a \quad (10)$$

$$9000 - 1000g = 1500a$$

$$3a = 18 - 2g$$

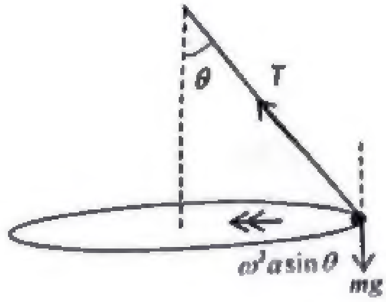
05
05
(PV)



5. දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට ද ඈඳා ඇත. අංශුව ω නියත කෝණික වේගයකින් තිරස් වෘත්තයක චලනය වේ. තන්තුව යටි අත් සිරස සමඟ $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදයි. $\omega > \sqrt{\frac{g}{a}}$ බව පෙන්වන්න.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$\uparrow \; T\cos\theta = mg$ ....(1) 5



$\leftarrow T\sin\theta = m\omega^2 a\sin\theta$ -----(2) 5

$\therefore T = m\omega^2 a$

(1) හා (2) : $\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{g}{\omega^2 a}$ 5

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, බැවින් $\cos\theta<1.$ 5

$\therefore \dfrac{g}{\omega^2 a} < 1.$

$\therefore \omega > \sqrt{\dfrac{g}{a}}$ 5

Enu

6. [illegible] O [illegible] A [illegible] B [illegible] $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ [illegible] $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ [illegible] O, A [illegible] B [illegible]
C [illegible] $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{OA}$ [illegible] $\lambda \in \mathbb{R}$ [illegible] $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ [illegible] λ [illegible] $\overrightarrow{OC}$ [illegible]
$B\hat{O}C = \frac{\pi}{2}$ [illegible] $\lambda = -\frac{10}{7}$ [illegible]

$3:2 \neq 2:4$, [illegible] O, A [illegible] B [illegible] (5) Enu

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \quad (5)$$

$$= 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \lambda(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = (2 + 3\lambda)\mathbf{i} + (4 + 2\lambda)\mathbf{j} \quad (5)$$

$$B\hat{O}C = \frac{\pi}{2}, \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

$$\therefore (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \cdot \left((2 + 3\lambda)\mathbf{i} + (4 + 2\lambda)\mathbf{j}\right) = 0. \quad (5)$$

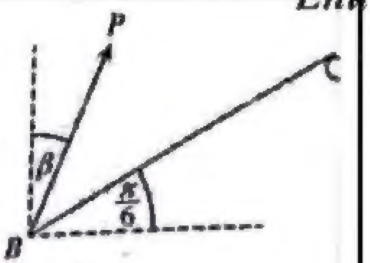
$$\therefore 4 + 6\lambda + 16 + 8\lambda = 0.$$

$$\therefore \lambda = \frac{-10}{7}. \quad (5)$$

25

Enu

7. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, AB ඒකාකාර දණ්ඩක් එහි ඉහළ කෙළවර A සුමට නාදැත්තක් මත රඳවා සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ එහි පහළ කෙළවර B ට, සිරස සමග β කෝණයක් සාදන, P බලයක් යෙදීමෙනි. දණ්ඩ තිරස සමග $\frac{\pi}{6}$ කෝණයක් සාදයි. $\tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{5}$ බව පෙන්වන්න.



ΔBMN; $BM = a\cos\frac{\pi}{6} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5)

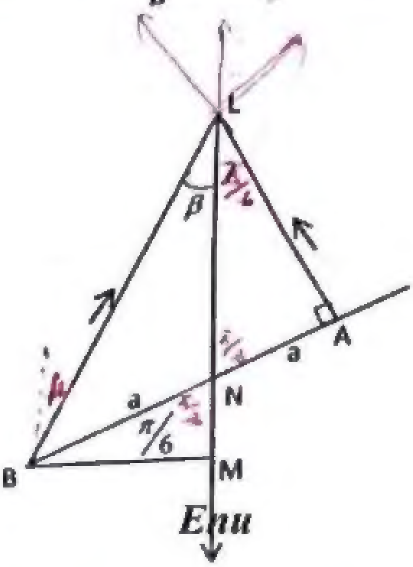
$MN = a\sin\frac{\pi}{6} = \frac{a}{2}$ (5)

ΔALN; $LN = \frac{a}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2a$ (5)

$\therefore LM = 2a + \frac{a}{2} = \frac{5a}{2}.$ (5)

ΔBLM; $\tan\beta = \frac{BM}{LM} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{5\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$ (5)

$\tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{5}.$



$(1+1)\cot 60 = 1\cdot\cot\beta - 1$ [illegible]

$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\tan\beta} - \sqrt{3}$

$\tan\beta = \sqrt{3}/5$

වෙනත් ක්‍රමයක්

(5)

$B \curvearrowleft$ $W a \cos\frac{\pi}{6} = R.(2a) \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}W}{4}.$

$\uparrow$ $P\cos\beta + R\cos\frac{\pi}{6} = W$ (5)

$P\cos\beta = W - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}W}{2} = \frac{5W}{8}$ (5)

$\rightarrow$ $P\sin\beta = R\sin\frac{\pi}{6}$ (5)

$= \frac{\sqrt{3}W}{4}\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}W}{8}$

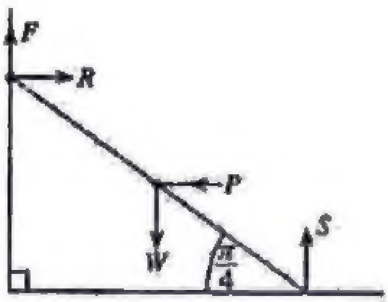
$\therefore \tan\beta = \frac{\sqrt{3}W}{8} \div \frac{5W}{8} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ (5)

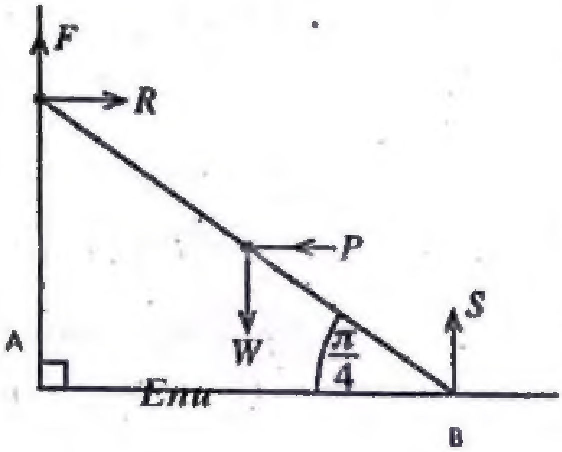
cot [illegible]

2.5

25

8. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, බර W හා දිග $2a$ වූ ඒකාකාර ඉණිමගක් රළු සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව එහි පහළ කෙළවර සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත ඇතිව සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ ඉණිමගේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේදී යෙදූ විශාලත්වය P වූ තිරස් බලයක් මගිනි. ඉණිමග ගෙබිම සමග $\frac{\pi}{4}$ ක කෝණයක් සාදයි. ඉණිමග හා බිත්තිය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{6}$ වේ. $\frac{3W}{4} \le P \le \frac{3W}{2}$ බව පෙන්වන්න.





$\uparrow \quad F + S = W$ (5)

$\leftarrow \quad P = R$ (5)

$A \circlearrowleft \quad W a \cos\frac{\pi}{4} + P \cdot a \cdot \sin\frac{\pi}{4} - S \cdot 2a\cos\frac{\pi}{4} = 0$ (5)

(B වටා [illegible] (10) [illegible])

$\therefore \quad S = \frac{W + P}{2},$

$F = \frac{W - P}{2}.$

$\frac{1}{6} \ge \frac{|F|}{R}$

$\mu \ge \frac{|F|}{R}$ [illegible] - (05)

$\Rightarrow -\frac{1}{6} \le \frac{W - P}{2P} \le \frac{1}{6}$

$\Rightarrow -P \le 3(W - P) \le P$

$\Rightarrow \frac{3W}{4} \le P \le \frac{3W}{2}.$ (10)

[illegible] - (05)

25

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. $P(A)=\frac{2}{7}$, $P(A\cup B)=\frac{11}{14}$ හා $P(A'\cup B')=\frac{4}{5}$ බව දී ඇත. $P(B)$ සොයා A හා B ස්වායත්ත සිද්ධි බව පෙන්වන්න.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{11}{14}=\frac{2}{7}+P(B)-\frac{1}{5}.$$

$$\therefore P(B)=\frac{7}{10}. \quad (5)$$

$$P(A\cap B)=1-P(A'\cup B')=\frac{1}{5} \quad (5)\ (5)$$

$$P(A)P(B)=\frac{2}{7}\times\frac{7}{10}=\frac{1}{5}=P(A\cap B). \quad (5)$$

$\therefore A$ හා B ස්වායත්ත වේ.

$p(A'\cup B')=P(A\cap B)'$
$=1-P(A\cap B)$
$\frac{4}{5}=1-P(A\cap B)$
$P(A\cap B)=1/5$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$\frac{11}{14}=\frac{2}{7}+P(B)-1/5$
$P(B)=7/10$
$P(A)\,P(B)=1/5$

25

10. සිසුන් 100 දෙනෙකු පරීක්ෂණයකදී ලබාගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් 60 හා 20 වේ. මෙම පරීක්ෂණය සඳහා ලකුණු 56 ක් ලබාගත් සිසුවෙකුගේ z-ලකුණ සොයන්න.
එක් සිසුවෙකුගේ ලකුණු 65 ක් විය යුතු බවත්, එය වැරදියට 56 ලෙස ඇතුළත් කර ඇති බවත් දී ඇත. මෙම පරීක්ෂණය සඳහා ලබාගත් ලකුණුවල නිවැරදි මධ්‍යන්‍යය සොයන්න.

(5) ✓ → (5)

$$z=\frac{56-60}{20}=\frac{-4}{20}=\frac{-1}{5}=-0.2 \quad (5)$$

$$60=\mu_{old}=\frac{\sum_{i=1}^{100}x_i}{100} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{100}x_i\right)_{old}=6000 \quad (5)$$

$$\therefore \mu_{correct}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{100}x_i\right)_{correct}}{100}=\frac{6000-56+65}{100}=\frac{6009}{100}=60.09 \quad (5)\ (5)$$

$\sum x_i = 60\times100-56+65$
$x = 60+\frac{9}{100}=60+0.09$
$x = 60.09$

25

11. (*a*) සෘජු තිරස් මාර්ගයක වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට නිශ්චලතාවයෙන් ගමන ආරම්භ කරන P කාරය $2f$ m s^{-2} ක නියත ත්වරණයකින් එම මාර්ගයේ වූ A ලක්ෂ්‍යය දක්වා ගමන් කරයි; මෙහි $OA = a$ m වේ. එය A හිදී ලබාගත් ප්‍රවේගය, ගමනේ ඉතිරි කොටස පුරාවටම පවත්වා ගනී. P කාරය A ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වන මොහොතේ, තවත් Q කාරයක් එම මාර්ගයේම එම දිශාවටම O ලක්ෂ්‍යයේ සිට නිශ්චලතාවයෙන් ගමන ආරම්භ කර, f m s^{-2} ක නියත ත්වරණයකින් චලනය වේ. එකම රූපයක, P හා Q හි චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින්, P හා Q හි ප්‍රවේග සමාන වන මොහොත දක්වා Q ගන්නා ලද කාලය $2\sqrt{\frac{a}{f}}$ s බව පෙන්වන්න.

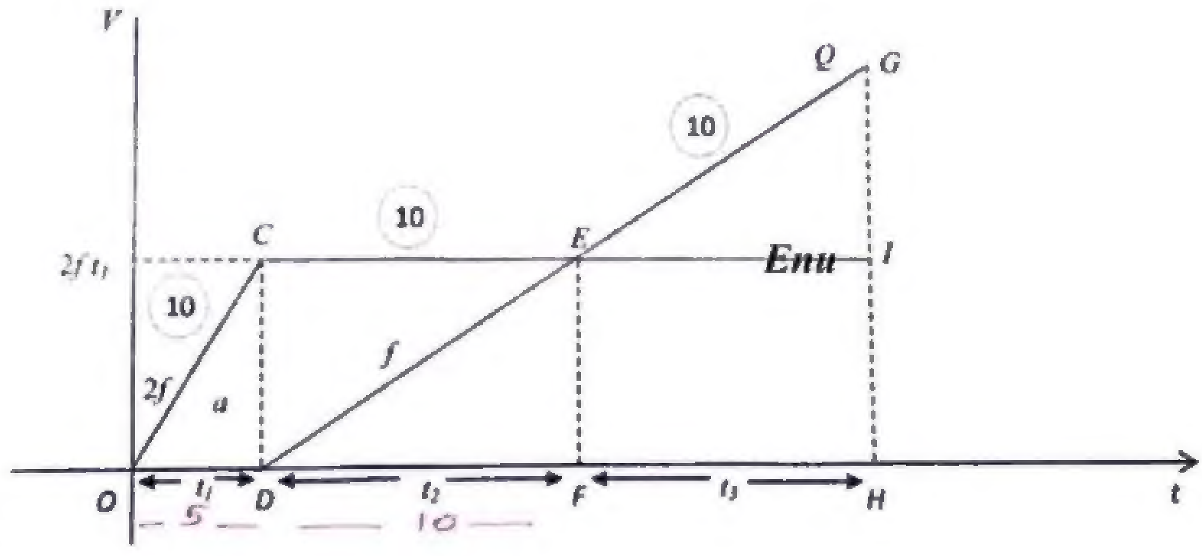
දැන්, $a = 50$ ද $f = 2$ ද හා Q කාරය P කාරය පසු කරන මාර්ගයේ ලක්ෂ්‍යය B යැයි ද ගනිමු.

$AB = 50\left(5 + 2\sqrt{6}\right)$ m බව පෙන්වන්න.

(*b*) P නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව 60 m s^{-1} ක ඒකාකාර වේගයකින් දකුණු දෙසට යාත්‍රා කරන අතර, Q නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව $30\sqrt{3}$ m s^{-1} ක ඒකාකාර වේගයකින් නැගෙනහිර දෙසට යාත්‍රා කරයි. තෙවන R නැවක්, එය P හි සිට නිරීක්ෂණය කරනු ලැබූ විට, නැගෙනහිරින් 30° ක් උතුරට වූ දිශාවට චලනය වන ලෙස පෙනෙන අතර, R නැව එය Q හි සිට නිරීක්ෂණය කරනු ලැබූ විට දකුණු දෙසට චලනය වන ලෙස පෙනෙයි. R නැව, පොළොවට සාපේක්ෂව, 60 m s^{-1} ක වේගයකින් නැගෙනහිරින් 30° ක් දකුණට වූ දිශාවට චලනය වන බව පෙන්වන්න.

ආරම්භයේදී R නැව, P සිට 24 km ක් ඈතින්, බටහිරින් 60° ක් දකුණට වූ දිශාවෙන් පිහිටන අතර Q සිට 6 km ක් ඈතින් බටහිර දිශාවෙන් පිහිටී යැයි සිතමු. P හා R, ඒවා අතර කෙටිම දුරින් පිහිටන විට Q හා R අතර දුර 12 km ක් බව පෙන්වන්න.

(*a*)



30

Δ OCD :

$$\frac{1}{2}(t_1)(2f\,t_1) = a \quad (5)$$

$$\Rightarrow \qquad t_1^2 = \frac{a}{f}$$

$$\therefore \qquad t_1 = \sqrt{\frac{a}{f}} \quad as \;\; t_1 > 0. \quad (5)$$

Δ DEF :

$$f = \frac{2f\,t_1}{t_2}. \quad (5)$$

$$\therefore t_2 = 2t_1.$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{f}} \quad (5)$$

20

$a = 50, \;\; f = 2.$

$$t_1 = \sqrt{\frac{50}{2}} = 5 \qquad t_2 = 10 \qquad 5$$

area of $OCED$ = area of EGI.

$$\frac{1}{2}(5+10)(2\cdot 2\cdot 5) = \frac{1}{2}t_3 \cdot t_3 \cdot 2 \qquad 5$$

$$t_3^2 = 150$$

$$t_3 = \sqrt{150} = 5\sqrt{6} \qquad 5$$

15

$$AB = \frac{1}{2}(t_2 + t_3)(2f\,t_1 + f\,t_3) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2}\left(10 + 5\sqrt{6}\right)\left(5\times 2 + 5\sqrt{6}\right)\cdot(2) = 50\left(5 + 5\sqrt{6}\right) \quad (5)$$

10

(b)

$$\underline{V}(P,E) = \downarrow 60$$
$$\underline{V}(Q,E) = \rightarrow 30\sqrt{3}$$
$$\underline{V}(R,P) = \nearrow 30^{0}$$
$$\underline{V}(R,Q) = \downarrow$$

10

$$\underline{V}(R,E) = \underline{V}(R,P) + \underline{V}(P,E)$$
$$= \underline{V}(P,E) + \underline{V}(R,P)$$
$$= \underline{V}(R,P) + \underline{V}(P,E)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

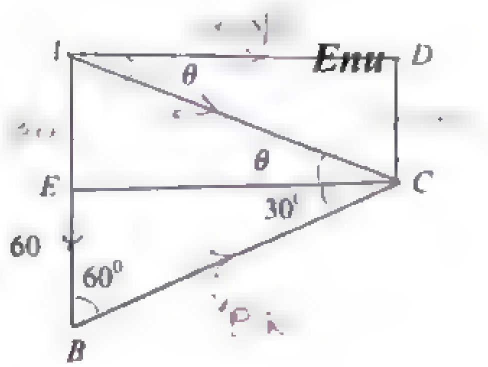
$\triangle ABC$ 15

$$= \overrightarrow{AC}.$$

$$\underline{V}(R,E) = \underline{V}(R,Q) + \underline{V}(Q,E)$$
$$= \underline{V}(Q,E) + \underline{V}(R,Q)$$
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

$\triangle ADC$ 15

$$= \overrightarrow{AC}$$



$$BE = 30\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$= 30.$$

$$\therefore AE = 30.$$

$$CE = 30\sqrt{3}.$$

$$\tan\theta = \frac{AE}{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ (5)

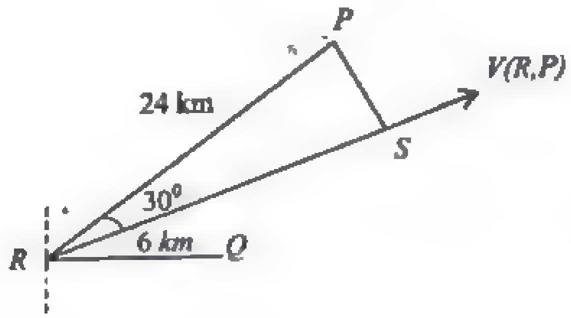
$$\therefore \theta = 30^{0}$$ (5)

$$V^2 = \left(30\sqrt{3}\right)^2 + 30^2 \quad (5)$$

$$V^2 = 30^2(4)$$

$$\therefore V = 60\text{ms}^{-1} \quad (5)$$

60



$$RS = 24000\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 12000\sqrt{3}$$

$$t = \frac{12000\sqrt{3}}{60}$$

$$= 200\sqrt{3}\text{ S} \quad (5)$$

Let $d = 30 \times 200\sqrt{3} = 6000\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3}km$ (5)

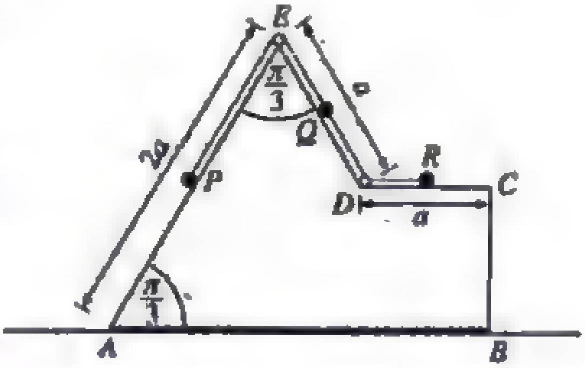
∴ [illegible] D km [illegible]

$$D^2 = 6^2 + 6^2(3)$$

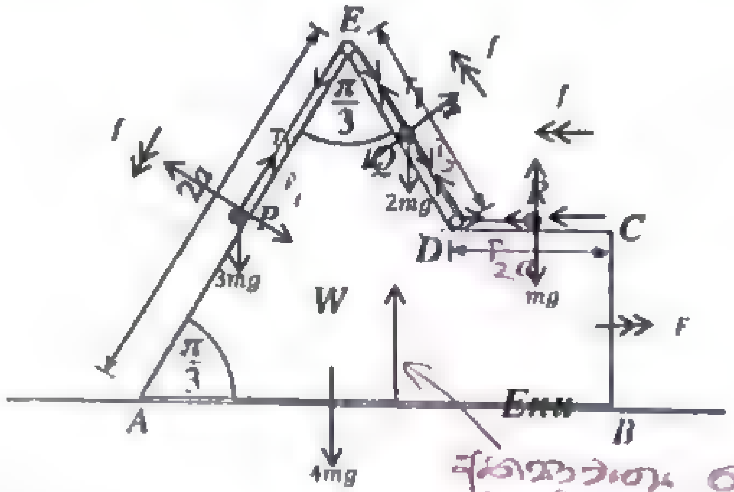
$$= 6^2(4)$$

$$\therefore D = 12\text{ km} \quad (5)$$

12.(a) ස්කන්ධය 4m වූ සුමට ඒකාකාර කුට්ටියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා වූ ABCDE සිරස් හරස්කඩ රූපයෙහි පෙන්වා ඇත. AB අඩංගු මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබා ඇත. AE හා ED රේඛා අඩංගු මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වේ. තවද, $AE = 2a$, $ED = a$, $DC = a$ හා $E\hat{A}B = A\hat{E}D = \frac{\pi}{3}$ වේ. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් $3m$, $2m$ හා m වන P, Q හා R අංශු තුනක් AE, ED හා DC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා ඇත. P හා Q අංශු, E හිදී කුට්ටියට සවිකර ඇති සුමට සැහැල්ලු කුඩා කප්පියක් මගින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඇඳා ඇති අතර, Q හා R අංශු, D හිදී කුට්ටියට සවිකර ඇති සුමට සැහැල්ලු කුඩා මුදුවක් තුළින් යන තවත් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඇඳා ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පිහිටුමේදී තන්තු තදව තිබෙන අතර මෙම පිහිටුමේ සිට පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. Q අංශුව E වෙත ළඟා වීමට ගන්නා කාලය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.



(a)



(10) for the forces.

අභ්‍යන්තර බල. (R_1, R_2)

$\vec{V}(W,E) = \rightarrow F$

$\vec{V}(P,W) = \swarrow f$.

එවිට $\vec{V}(Q,W) = \nwarrow f$ (5)

$\vec{V}(R,W) = \leftarrow f$ (5)

F_1, F_2 [illegible]

$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a}$:

P: $\swarrow 3mg\cos\frac{\pi}{6} - T_1 = 3m(f - F\cos\frac{\pi}{3})$ (15)

[illegible]

Q: $\nwarrow T_1 - T_2 - 2mg\cos\frac{\pi}{6} = 2m(f - F\cos\frac{\pi}{3})$ (15)

[illegible] T [illegible]

R: $\leftarrow T_2 = m(f - F)$ (10)

පද්ධතියට

$\rightarrow$

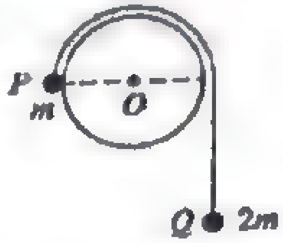
$$0 = 4mF + m(F - f) + 2m(F - f\cos\frac{\pi}{3}) + 3m(F - f\cos\frac{\pi}{3}) \quad (20)$$

$Q:\ \nwarrow s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2}ft^2. \quad (10)$$

90

(b) අරය a වූ සිලින්ඩරයක් එහි අක්ෂය තිරස්ව සවි කර ඇති අතර එහි අක්ෂයට ලම්බක සිරස් හරස්කඩක් යාබද රූපයෙන් දැක්වේ. සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සහ කළ ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $2m$ වූ P හා Q අංශු දෙකක් සම්බන්ධ කර OP තිරස්ව ද ඇතිව රූපයේ පෙන්වා ඇති පිහිටුමේ අල්වා තබා නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. Q අංශුව සිරස්ව පහළට චලනය වන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, $\overrightarrow{OP}$ සමග θ $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{6})$ කෝණයකින් හැරුණු විට P හි වේගය v යන්න $v^2 = \frac{2ga}{3}(2\theta - \sin\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.



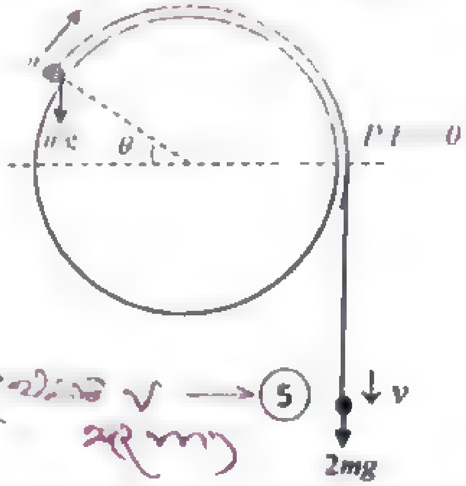
$\theta = \frac{\pi}{6}$ විට තන්තුව කැඩෙන අතර, P අංශුව සිලින්ඩරය මත චලනය වෙමින් සිලින්ඩරයේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වීමට පෙර [illegible] P එහි [illegible] a [illegible] විට, P හි වේගය සොයන්න.

(b) ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}2mv^2 + mga\sin\theta - 2mga\theta = 0$$

$$\Rightarrow 3v^2 = 2ag(2\theta - \sin\theta)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2ag}{3}(2\theta - \sin\theta). \quad (5)$$

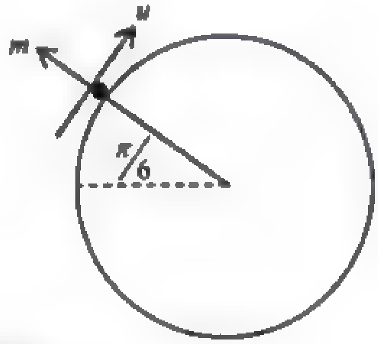


(5)

35

$v = u$ when $\theta = \frac{\pi}{6}$ is given by $u^2 = \frac{2ag}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\right)$ (10)

$= \frac{ag}{9}(2\pi - 3).$



ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්,

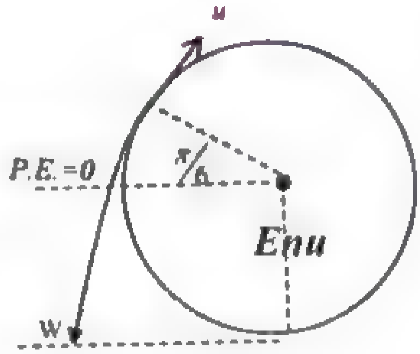
$$\frac{1}{2}mw^2 - mga = mg\frac{a}{2} + \frac{1}{2}mu^2 \quad (10) \text{ Or}$$

$$\frac{1}{2}mw^2 = \frac{3mga}{2} + \frac{1}{2}m\frac{ag}{9}(2\pi - 3)$$

$$\frac{1}{2}mw^2 = \frac{1}{2}mag\left[3 - \frac{1}{3} + \frac{2\pi}{9}\right]$$

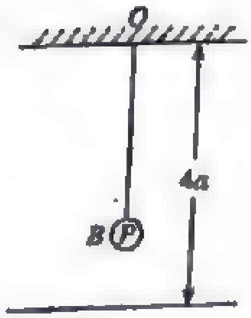
$$w^2 = ag\left[\frac{8}{3} + \frac{2\pi}{9}\right] = \frac{ag}{9}[24 + 2\pi]$$

$$w = \frac{\sqrt{2ga(\pi + 12)}}{3}. \quad (5)$$



25

13. ස්වභාවික දිග $2a$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $2mg$ වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක්, තිරස් පොළොවට $4a$ දුරක් ඉහළින් වූ O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද, අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ඈඳා ඇත. P අංශුව B හි සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. තන්තුවේ විතතිය a බව පෙන්වන්න.
දැන්, P හට mv ආවේගයක් සිරස්ව පහළට දෙනු ලැබේ. P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\omega=\sqrt{\frac{g}{a}}$ හා $BP=x$ වේ.
c විස්තාරය වන, $\dot{x}^2=\omega^2(c^2-x^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් $v>\sqrt{ag}$ නම්, P පොළොවේ වදින බව පෙන්වන්න;
දැන්, $v=3\sqrt{ag}$ යැයි සිතමු.
P පොළොවේ වදින ප්‍රවේගය සොයන්න.
P හා පොළොව අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. $e<\frac{1}{\sqrt{2}}$ නම්, P අංශුව O ට ළඟා නොවන බව පෙන්වන්න.
$e=\frac{1}{2}$ බව දී ඇති විට, තන්තුව පළමුවරට බුරුල් වන විට P හි ප්‍රවේගය සොයන්න.
B හිදී P ට ආවේගය දුන් මොහොතේ සිට, එය පළමුවරට ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පැමිණීමට ගතවන මුළු කාලය සොයන්න.



සමතුලිත පිහිටුවීමේදී

$$2mg\cdot\frac{x}{2a}=mg. \quad (5)$$

$$\therefore\ x=a. \quad (5)$$

10

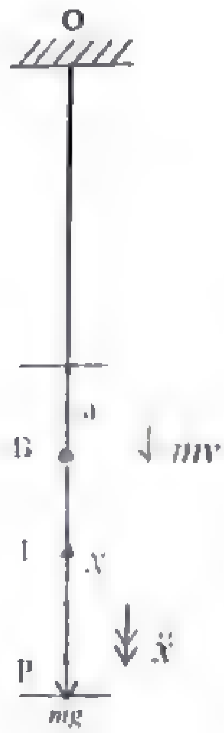
$F = ma$

$$\downarrow\ m\ddot{x} = mg - 2mg\frac{(a+x)}{2a} \quad 15$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{a}x \quad 5$$

$$\therefore\ \ddot{x}+\omega^2 x = 0,\ where\ \omega=\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

20



Enu

$\dot{x} = v$ when $x = 0$

$\therefore v^2 = \omega^2(c^2 - 0)$ (5)

$\therefore v = c\omega$

$\therefore c = \frac{v}{\omega}$. (5)

$v \geq \sqrt{ag}$, $c > \sqrt{ag}\,\sqrt{\frac{a}{g}} = a$ නම් වේ. (10)

$\therefore$ අංශුව බිමෙහි ගැටේ.

20

Enu

$x = a$ විට $\dot{x} = u$ යැයි ගනිමු (5)

$u^2 = \frac{g}{a}(9a^2 - a^2) = 8ag$, $\because$ $c = \frac{v}{w} = 3a$. (10)

10

$\therefore u = \sqrt{8ag}$. (5)

05

20

පොළොවේ ගැටීමෙන් මොහොතකට පසු P හි ප්‍රවේගය $= eu \uparrow$. (5)

$\dot{x} = 2\sqrt{2ga}$

$\frac{1}{2} m(2e\sqrt{2ga})^2 + \frac{1}{2} 2mg$

$(2-a)^2$

$\therefore \dot{x} = eu$, when $x = a$.

ස.අ.චි. හි කේන්ද්‍රය වටා සමමිතියෙන් $x = -a$ විට $\dot{x} = eu$. 15

ගුරුත්වය යටතේ චලිතය සඳහා $v^2 = u^2 + 2as$:

$\uparrow 0 = v_1^2 - 2gs$ (5)

$= mgh$

$\therefore s = \frac{8e^2ag}{2g} = 4e^2a$ (5)

$h = 2a(2e^2 + 1)$

$e < \frac{1}{\sqrt{2}}$ නම් $s < 2a$ බැවින් P, O ට ළඟා නොවේ. (10)

$h < 4a$

$2a(2e^2+1) < 4a$

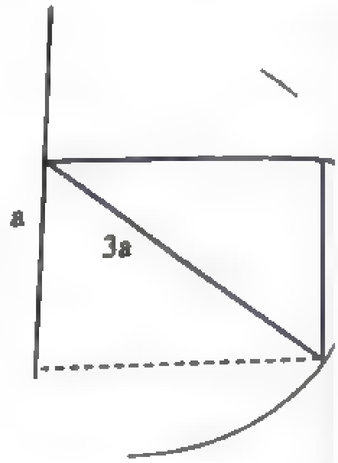
$e^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow e < \frac{1}{\sqrt{2}}$

40

$e = \frac{1}{2}$ විට $v_1 = \sqrt{8e^2ag} = \sqrt{2ag}$ (10)

10

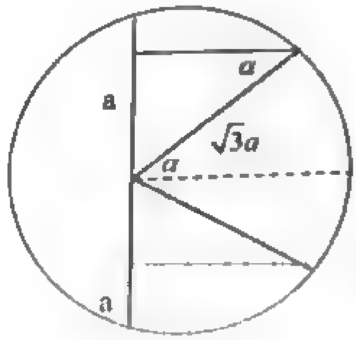
Enu



සිමෙහි ගැටීමට ගතවන කාලය $T_1 = \dfrac{\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{g}{a}}}$ (10)

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$e=\frac{1}{2}$ යැයි ගනිමු. එවිට $C_1=\sqrt{3}a$.



ස්වභාවික දිගට ඒමට ගතවන කාලය

$$T_2 = \frac{2\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\frac{g}{a}}}.$$ (10)

ගුරුත්වය යටතේ චලිතයට : $\uparrow\ V = u + at.$

$$T_3 = \frac{\sqrt{2ag}}{g} = \sqrt{\frac{2a}{g}}$$ (5)

ගතවුන මුළු කාලය $T_1+T_2+T_3 = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+2\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{2}\right).$ (5)

30

14.(a) A, B, C හා D ලක්ෂ්‍ය හතරක පිහිටුම් දෛශික, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙළින් $\mathbf{a}, \mathbf{b}, 3\mathbf{a}$ හා $4\mathbf{b}$ වේ; මෙහි $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යනු ශූන්‍ය නොවන හා සමාන්තර නොවන දෛශික වේ. E යනු AD හා BC හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ. OAE ත්‍රිකෝණය සඳහා ත්‍රිකෝණ ආකලන නියමය භාවිතයෙන්,

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $\overrightarrow{OE} = \mathbf{a} + \lambda(4\mathbf{b} - \mathbf{a})$ බව පෙන්වන්න.

එලෙසම, $\mu \in \mathbb{R}$ සඳහා $\overrightarrow{OE} = \mathbf{b} + \mu(3\mathbf{a} - \mathbf{b})$ බව ද පෙන්වන්න.

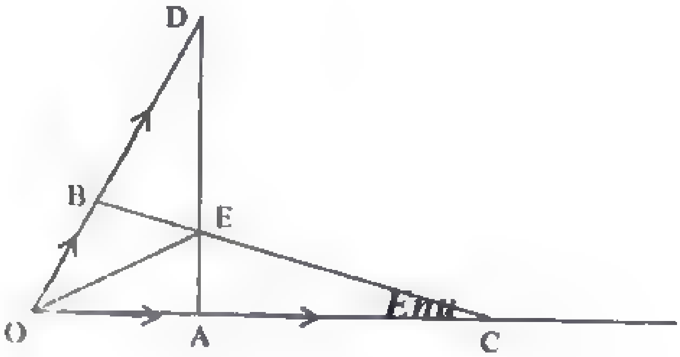
ඒ නයින්, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{11}(9\mathbf{a} + 8\mathbf{b})$ බව පෙන්වන්න.

(b) $\alpha\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, -3\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$ හා $\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ යන බල තුන, පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i} + \mathbf{j}, 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ හා $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ වූ ලක්ෂ්‍ය හරහා ක්‍රියාකරයි; මෙහි $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ වේ. මෙම බල පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය වන බව දී ඇත. α හා β හි අගයන් ද මෙම යුග්මයේ ඝූර්ණය ද සොයන්න.

දැන්, O මූලය හරහා ක්‍රියාකරන $3\gamma\mathbf{i} + 4\gamma\mathbf{j}$ අලුත් බලයක් ඉහත බල පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ; මෙහි $\gamma > 0$ වේ. මෙම බල 4 කින් සමන්විත නව බල පද්ධතිය සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා එහි විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

ඊළඟට, පිහිටුම් දෛශිකය $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ වූ ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියාකරන $p\mathbf{i} + q\mathbf{j}$ බලයක් එකතු කළ විට, බල 5 කින් සමන්විත මෙම පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ ඇති බව දී ඇත. γ, p හා q හි අගයන් සොයන්න.

(a)



$\overline{OE} = \overline{OA} + \overline{AE}$

$= \underline{a} + \lambda\overline{AD}$ 5

$= \underline{a} + \lambda\left(\overline{AO} + \overline{OD}\right)$ 5

$= \underline{a} + \lambda\left(4\underline{b} - \underline{a}\right)$ 5

$\overline{OE} = \overline{OB} + \overline{BE}$

$= \underline{b} + \mu\overline{BC}$ 5

$= \underline{b} + \mu\left(\overline{BO} + \overline{OC}\right)$ 5

$= \underline{b} + \mu\left(3\underline{a} - \underline{b}\right)$ 5

$\boxed{\cancel{30}}$

$$\therefore\ \underline{a}+\lambda(4\underline{b}-\underline{a})=\underline{b}+\mu(3\underline{a}-\underline{b}) \quad (5)$$

$$(1-\lambda)\underline{a}+4\lambda\underline{b}=3\mu\underline{a}+(1-\mu)\underline{b} \quad (5)$$

$$\Rightarrow 1-\lambda=3\mu \ \ \& \ \ 1-\mu=4\lambda \quad (5)$$

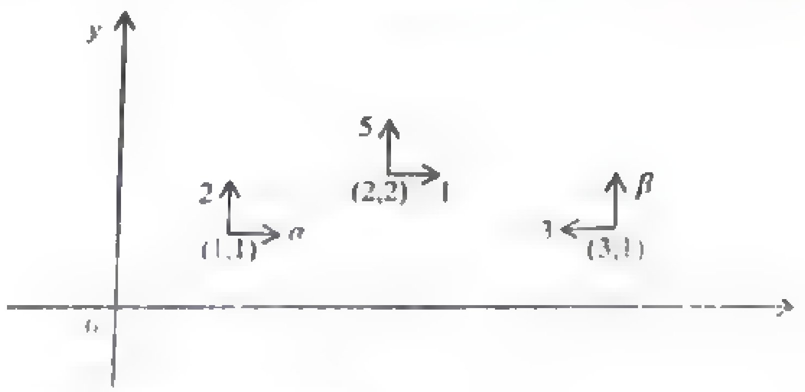
$$\therefore\ \lambda=\frac{2}{11} \quad (5)$$

$$\therefore \overline{OE}=a+\frac{2}{11}(4\underline{b}-\underline{a}) \quad (5)$$

$$=\frac{1}{11}(9\underline{a}+8\underline{b}). \quad (5)$$

60

(b)



$$\rightarrow X=0, \quad \uparrow Y=0 \ \text{ and } \ G\neq 0.$$

$$X=\alpha-3+1=0. \quad (5)$$

$$\Rightarrow \alpha=2 \quad (5)$$

$$Y=2+\beta+5=0. \quad (5)$$

$$\Rightarrow \beta=-7 \quad (5)$$

20

$$O\circlearrowright\ G=2(1)-2(1)+3(1)-7(3)+5(2)-1(2) \quad (5)$$

$$=3-21+10-2$$

$$=13-23$$

$$=-10. \quad (5)$$

10

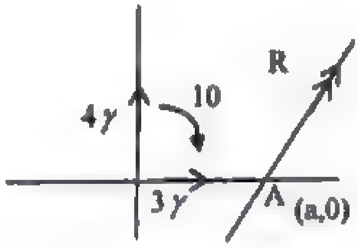
$R^2 = 9\gamma^2 + 16\gamma^2$ (5)

$\quad = 25\gamma^2$

$\therefore R = 5\gamma.$ (5)

$\tan\theta = \dfrac{4\gamma}{3\gamma} = \dfrac{4}{3}$ (5)

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right)$ (5)

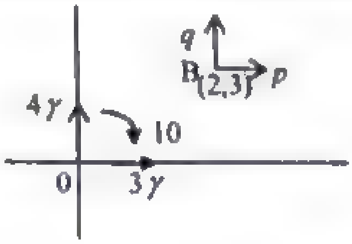


A↻ $4\gamma a = 10$

$\therefore a = \dfrac{-5}{2\gamma}$ (5)

ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය $4x - 3y - \dfrac{10}{\gamma} = 0.$ (5)

30



$\rightarrow p + 3\gamma = 0$ (5) $\qquad \uparrow q + 4\gamma = 0$ (5)

$\therefore p = -3\gamma \qquad \therefore q = -4\gamma$

B↻ $(3\gamma \times 3) - (4\gamma \times 2) - 10 = 0$ (5)

$\therefore \gamma = 10.$ (5)

$\therefore p = -30$ (5) & $q = -40$ (5)

30

වෙනත් ක්‍රමයක්

O↻ $q(2) - 3p - 4r(x) = 0$ (5)

$2q - 3p - 4r\left(\dfrac{5}{2r}\right) = 0$ (5)

$2q - 3p - 10 = 0$

O↻ $\uparrow q + 4\gamma = 0 \Rightarrow q = -4\gamma$ (5)

$\rightarrow p + 3\gamma = 0 \Rightarrow p = -3\gamma$ (5)

$2(-4\gamma) - 3(-3\gamma) = 10$

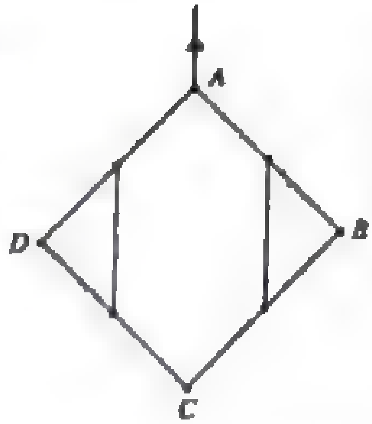
$-8\gamma + 9\gamma = 10$

$\gamma = 10$

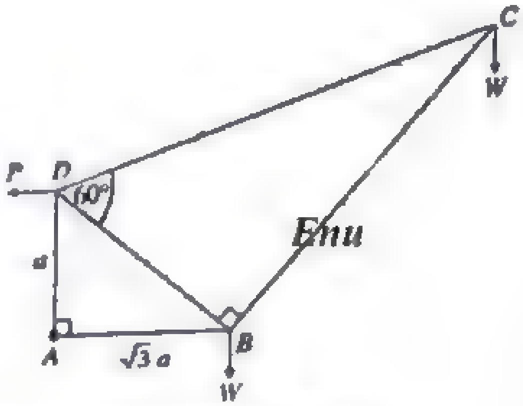
$p = -30$ (5) & $q = -40$ (5)

30

15. (a) එක එකක දිග $2a$ හා බර W වූ AB, BC, CD හා DA ඒකාකාර දඬු හතරක් ඒවායේ A, B, C හා D අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් යා කර ඇත. එලෙසම, AD හා DC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ද දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් යා කර ඇත. පද්ධතිය A ලක්ෂ්‍යයෙන් සිරස් තලයක එල්ලා ඇති අතර රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි සමතුලිතතාවේ පවතී. තන්තුවල ආතති ද BC මගින් AB මත B සන්ධියෙහිදී යෙදෙන ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.



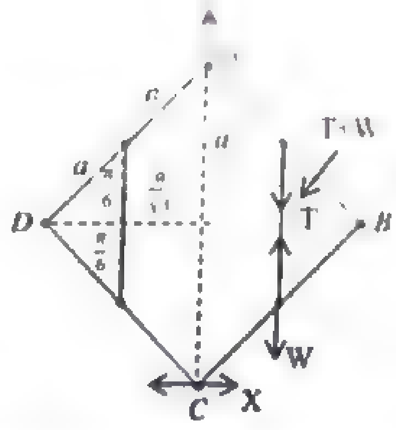
(b) රූපයේ දැක්වෙන, AB, BC, CD, DA හා DB සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ල. ඒවායේ අන්තවලදී සුමටව සන්ධි කර ඇත. $AD = a$, $AB = \sqrt{3}a$, $B\hat{A}D = 90^\circ$, $C\hat{B}D = 90^\circ$ හා $B\hat{D}C = 60^\circ$ බව දී ඇත. B හා C සන්ධි එක එකක W භාරය බැගින් එල්ලා රාමු සැකිල්ල A හිදී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමටව සන්ධි කර AB තිරස්ව ඇතිව සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ, D සන්ධියෙහිදී යෙදූ තිරස් P බලයක් මගිනි.



(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන්, C, B හා D සන්ධි සඳහා, ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න. ඒ නයින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් සොයන්න.

(a)



සමමිතියෙන් C හිදී DC මගින් CB මත ප්‍රතික්‍රියාව තිරස් වේ. 5

For ABC,

A ↻ : $X \cdot 2a - 2W \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0$ (5)

$$X = \frac{\sqrt{3}W}{2} \quad (5)$$

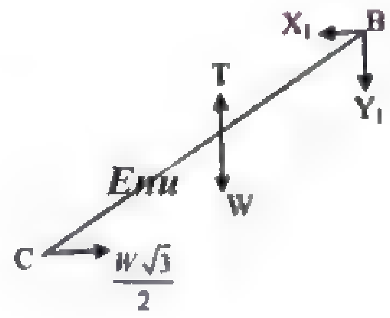
(on error [illegible])

For BC:

B ↻ : $\frac{W\sqrt{3}}{2} \cdot a + W \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - T \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0$ (10)

$T = 2W.$ (5)

For BC:



$\rightarrow \quad X_1 = \frac{W\sqrt{3}}{2}$; (5)

$\uparrow T - W - Y_1 = 0.$ (5)

$\therefore Y_1 = W$ (5)

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}W}{2}\right)^2 + W^2}$$

$$= \frac{\sqrt{7}W}{2} \quad (5)$$

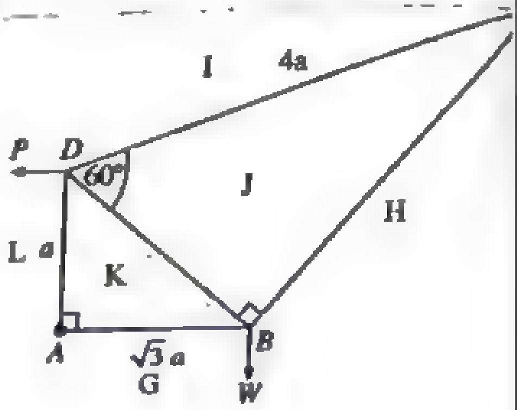
$$\tan\theta = \frac{Y_1}{X_1} = \frac{W}{\frac{W\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

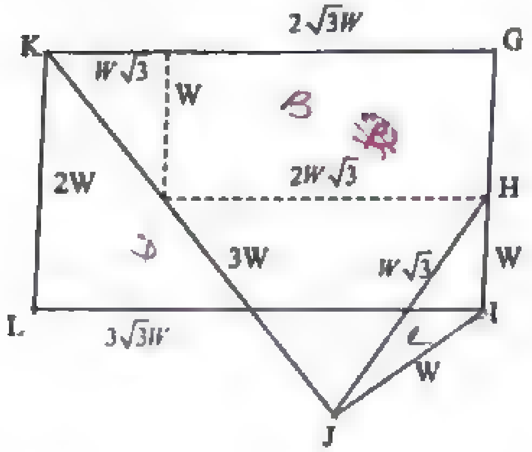
$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad (5)$$

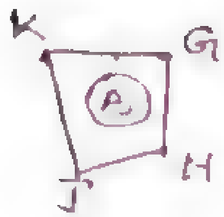
55

(b) $A \circlearrowright \quad P \times a - W \times \sqrt{3}a - W \times 2\sqrt{3}a = 0$ (10)

$\therefore \; P = 3\sqrt{3}W.$ (5)



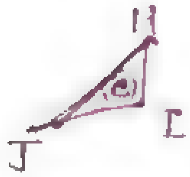


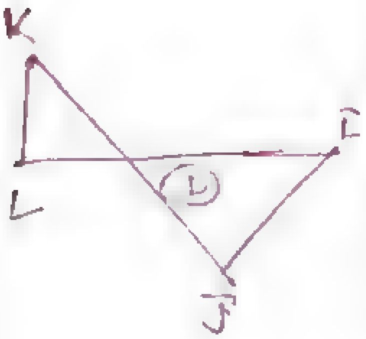


C සන්ධිය: (10)

D සන්ධිය: 10

B සන්ධිය: 10



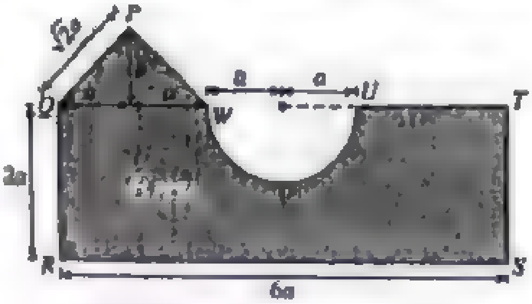


දණ්ඩ	තෙරපුම	ආතතිය	විශාලත්වය	
AB	✓	-	$\sqrt{3}W$	10
BC	✓	-	$\sqrt{3}W$	10
CD	-	✓	W	10
BD	-	✓	5W	(10)
AD	✓	-	2W	(10)

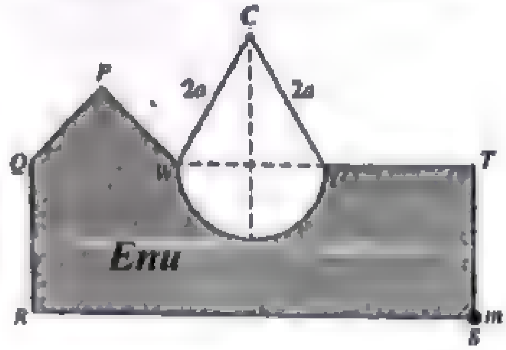
95

16. අරය r වූ කේන්ද්‍රය O වන ඒකාකාර අර්ධවෘත්තාකාර ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, O සිට $\frac{4r}{3\pi}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

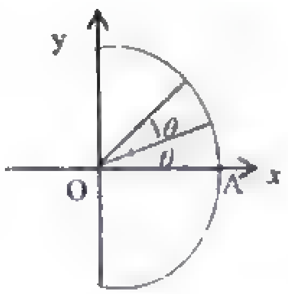
යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, $QRST$ සෘජුකෝණාස්‍රයකින් අරය a වූ අර්ධ වෘත්තයක් ඉවත් කර, සමාන පැත්තක දිග $\sqrt{2}a$ වූ PQW සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් එක් කර ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ වූ ඒකාකාර ඇති තලීය ආස්තරයකින් තල ආස්තරයක් සාදා ඇත. $QR = 2a$, $RS = 6a$ හා $QW = 2a$ වේ. මෙම ආස්තරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය QR සිට $\overline{x}$ දුරකින්ද, RS සිට $\overline{y}$ දුරකින්ද පිහිටයි. $\overline{x} = \frac{(74-3\pi)}{(26-\pi)}a$ හා $\overline{y} = \frac{2(15-\pi)}{(26-\pi)}a$ බව පෙන්වන්න.



රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, S හිදී ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් සවි කළ ඉහත ආස්තරය, තුනී සුමට අවල C නාදුත්තක් හරහා යන, U හා W ට සම්බන්ධ කළ දිග $4a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් RS තිරස්ව සිටින සේ සමතුලිතතාවයේ එල්ලේ. a හා σ ඇසුරෙන් m හි අගය හා තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.



සමමිතියෙන් $\overline{y} = 0$ (5)



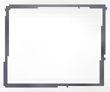
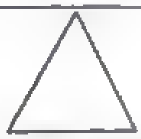
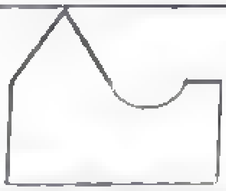
$$\Delta m = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta \times \sigma$$

$$\overline{x} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \sigma \cdot \frac{2}{3} r \cos\theta \, d\theta \quad (5)}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \sigma \cdot d\theta \quad (5)}$$

$$= \frac{\left.\frac{2}{3} r^3 \sin\theta \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \quad (5)}{\left.\frac{1}{2} r^2 \theta \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \quad (5)}$$

$$= \frac{4r}{3\pi} \quad (5)$$

30

වස්තුව	ස්කන්ධය 05	QR සිට දුර 01	RS සිට දුර 01
	$12a^2\sigma$	$3a$	a
	$\frac{1}{2}\pi a^2\sigma$	$3a$	$2a-\frac{4a}{3\pi}$
	$\frac{1}{2}(2a)a\sigma$ $=a^2\sigma$	a	$2a+\frac{1}{3}a=\frac{7a}{3}$
	$12a-\frac{1}{2}\pi i+a^2\sigma$ $\left(13-\frac{\pi}{2}\right)a^2\sigma$ 5	$\bar{x}$	$\bar{y}$

$$\left(13-\frac{\pi}{2}\right)a^2\sigma\bar{x} = 12a^2\sigma(3a)-\frac{1}{2}\pi a^2\sigma(3a)+a^2\sigma(a) \qquad 15$$

$$\Rightarrow \quad (26-\pi)a^2\sigma\bar{x} = 72a^3\sigma 3\pi a^3\sigma + 2a^3\sigma$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{(74-3\pi)a}{(26-\pi)} \qquad 5$$

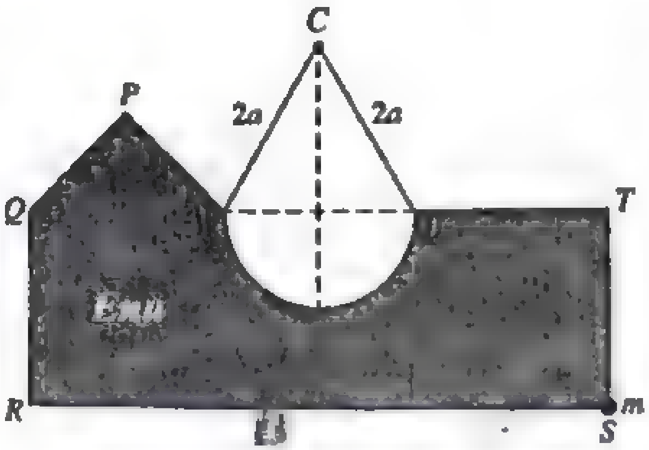
$$\left(13-\frac{\pi}{2}\right)a^2\sigma\bar{y} = 12a^2\sigma(a)-\frac{1}{2}\pi a^2\sigma\left(2a-\frac{4a}{3\pi}\right)+a^2\sigma\left(\frac{7a}{3}\right) \qquad 15$$

$$\Rightarrow\left(\frac{26-\pi}{2}\right)a^2\sigma\bar{y} = 12a^3\sigma-\pi a^3\sigma+\frac{2a^3\sigma}{3}+\frac{7a^3\sigma}{3} \qquad \cancel{5}$$

$$= \frac{45a^3\sigma-3\pi a^3\sigma}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{2(15-\pi)a}{(26-\pi)} \qquad 5$$

9



C↻ :

$$mg(3a)=\left(13-\frac{\pi}{2}\right)a^2\sigma g(3a-\bar{x}) \quad (10)$$

$$m=\frac{(26-\pi)}{6}a\,\sigma\left(3a-\frac{(74-3\pi)a}{26-\pi}\right) \quad (5)$$

$$=\frac{a^2\sigma}{2}(4a+3\pi a-3\pi a)$$

$$m=\frac{2a^2\sigma}{3}. \quad (5)$$

$$\uparrow \qquad 2T\cos\frac{\pi}{6}=mg+\left(13-\frac{\pi}{2}\right)a^2\sigma g \quad (5)$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{3}\,T=\frac{2}{3}a^2\sigma g+13a^2\sigma g-\frac{\pi}{2}a^2\sigma g$$

$$=\frac{41a^2\sigma g}{3}-\frac{\pi a^2\sigma g}{2}$$

$$T=\frac{(82-3\pi)a^2\sigma g}{6\sqrt{3}} \quad (5)$$

30

17\. (a) B_1, B_2, B_3 [illegible] B_4 [illegible] 4 [illegible] $k = 1, 2, 3, 4$ [illegible] B_k [illegible] k [illegible] $4 - k$ [illegible] 2 [illegible]

(i) [illegible]

(ii) [illegible] B_4 [illegible]

[illegible]

(b) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ [illegible] $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ [illegible] σ_x [illegible] σ_y [illegible] $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ [illegible] $\dfrac{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}{n+m}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] (mm)	[illegible]
2 – 6	2
6 – 10	5
10 – 14	8
14 – 18	4
18 – 22	1

[illegible]

[illegible] 40 000 [illegible] 22.53 mm² [illegible]

(a)

$$P(RR) = P(RR|B_1)P(B_1) + P(RR|B_2)P(B_2) + P(RR|B_3)P(B_3) + P(RR|B_4)P(B_4)$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{^2C_2}{^4C_2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{^3C_2}{^4C_2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{^4C_2}{^4C_2} \cdot \frac{1}{4} \quad 20$$

$$= \frac{1}{4 \cdot {^4C_2}}[1 + 3 + 6]$$

$$= \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \quad 5$$

$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \right.$$

$$P(B_4|RR) = \frac{P(B_4|RR)P(B_4)}{P(RR)} \quad 10$$

$$\frac{2}{12} + \frac{6}{12} + 1$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} \quad 5 \quad 5$$

$$\cancel{12}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{12}{20} = \frac{3}{5}. \quad 5$$

60

$$\frac{20}{12} \times \frac{1}{4} =$$

(b)

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ සහ $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ දත්ත කුලක එක එකෙහි මධ්‍යන්‍යය μ යැයි ගනිමු.

එවිට සංයුක්ත දත්ත කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍යය μ ම වේ. (5)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i^2}{n+m} - \mu^2 \quad (5)$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\mu^2}{n+m}\right] + \left[\frac{\sum_{i=1}^{m} y_i^2 - m\mu^2}{n+m}\right] \quad (5)$$

$$= \frac{1}{n+m}\left[n\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \mu^2}_{\sigma_x^2}\right) + m\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}{m} - \mu^2}_{\sigma_y^2}\right)\right] \quad (5)$$

$$= \frac{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}{n+m} \quad (5)$$

25

විෂ්කම්භය (mm)	$f(10^3)$	මධ්‍ය අගය x	xf	$x^2 f$
2 - 6	2	4	8	32
6 - 10	5	8	40	320
10 - 14	8	12	96	1152
14 - 18	4	16	64	1024
18 - 22	1	20	20	400
	20		228	2928
	(5)		10	10

$$\text{මධ්‍යන්‍යය} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{228}{20} = 11.4\text{mm} \quad (5)$$

(5)

$$\text{විචලතාව} = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \mu^2 = \frac{2928}{20} - (11.4)^2 = 146.4 - 129.96$$

(5) (5)

$$= 16.44 \text{ mm}^2.$$

$$\text{මධ්‍යස්ථය} = 10 + \frac{(10-7)}{8} \times 4 \quad (5)$$

$$= 11.5\text{mm}$$ (105)

(10)

සංයුක්ත විචලතාව $= \dfrac{1}{20+40}\{20\sigma_1^2 + 40\sigma_2^2\} = \dfrac{1}{60}\{20\times 16.44 + 40\times 22.53\}$ (5)

$= 20.5\ \text{mm}^2.$

65

$\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ $\qquad$ $\{y_1, y_2, \ldots y_n\}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{m}$$

$$\bar{x} = \bar{y}$$

$$\therefore \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{m}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2} \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}{m} - \bar{y}^2}$$

සංයුක්ත දත්ත කුලකයේ මධ්‍යනය $\bar{Z}$ නම්,

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_i}{m+n}$$

$$= \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{m+n} = \frac{n\bar{x} + m\bar{x}}{m+n} = \frac{\bar{x}(m+n)}{(m+n)}$$

$$\bar{Z} = \bar{x}$$

$$\text{විචලතාව} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i^2}{m+n} - \bar{Z}^2$$

$$= \frac{n(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) + m(\sigma_y^2 + \bar{y}^2)}{m+n} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{n\sigma_x^2 + \cancel{n\bar{x}^2} + m\sigma_y^2 + m\bar{y}^2 - m\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{m+n}$$

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ සඳහා වා: පැ: $= \frac{1}{2}$ හා දැ: පැ: $= \frac{1}{2}$.

$\therefore$ $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{k}{k+1}$. ....*Enu*.... (1) 5

දැන්, $\sum_{r=1}^{k+1} \frac{1}{r(r+1)} = \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad 5$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

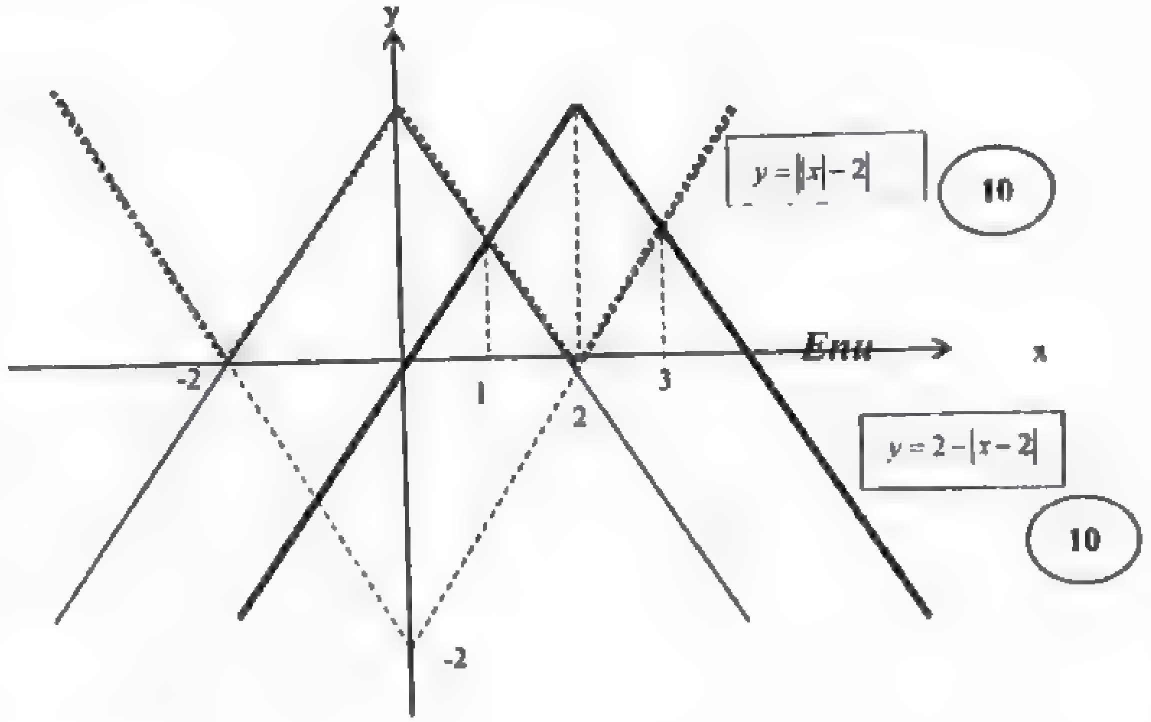
$$= \frac{k+1}{k+2} \quad 5$$

ඒ නයින්, $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n=k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ඒ නයින්, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහාම ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

25

(a) එකම රූප සටහනක $y = 2 - |x-2|$ හා $y = \left||x|-2\right|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න. එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $\left||x|-2\right| + |x-2| \le 2$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්වික අගයන් සොයන්න.



$\left||x|-2\right| + |x-2| \le 2$

$\Leftrightarrow \left||x|-2\right| \le 2 - |x-2|$

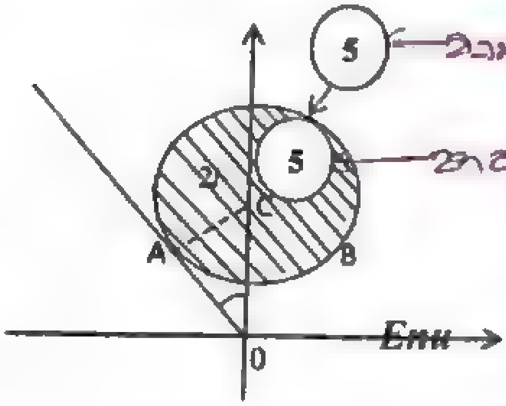
ප්‍රස්තාරයෙන් $1 \le x \le 3$ බව ලැබේ. 5

25

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $|\bar{z}+2i| \leq 1$ යන අසමානතාව සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවලින් සමන්විත පෙදෙස අඳුරු කරන්න.
මෙම අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කෙරෙනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සඳහා $\text{Arg}\, z$ හි විශාලතම අගය සොයන්න.

$|\bar{z}+2i| = |z-2i|$. 5

ඒ නයින් $|z-2i| \leq 1$ මගින් දෙනු ලබන පෙදෙස දී ඇති පෙදෙසම වේ.



5 — වෘත්තය ඇඳීම.

5 — පාට කිරීම.

(වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය y අක්ෂය මත ඉහළ අක්ෂය මත තිබිය යුතුය.)

* වෘත්තය x අක්ෂය ස්පර්ශ නොවිය යුතුය

A මගින් නිරූපණය කරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව z_0 යැයි ගනිමු.

ΔOAC මගින් $A\hat{O}C = \frac{\pi}{6}$ ලැබේ. 5

$\text{Arg}\, z$ හි අවශ්‍ය විශාලතම අගය $= \text{Arg}\, z_0$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{2\pi}{3}.$$ 5

පළමුවන 5 සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක්:

$z = x + iy$, යැයි ගනිමු; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$.

Then $|\bar{z}+2i|^2 = |x-(y-z)i|^2$

$= x^2 + (y-2)^2$ 5

ඒ නයින්, දී ඇති පෙදෙස $x^2 + (y-2)^2 \leq 1$ මගින් දෙනු ලබන පෙදෙසම වේ

25

$a \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. x හි ආරෝහණ බලවලින් x^2 පදය දක්වා එය ද ඇතුළුව $(2+ax)^5$ හි ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.
එනයින්, $(4-5x)(2+ax)^5$ ප්‍රසාරණයේ x^2 හි සංගුණකය -80 වන a හි අගයන් සොයන්න.

අවශ්‍ය ප්‍රකාශනය $= {}^5C_0 2^5 + {}^5C_1 2^4(ax) + {}^5C_2 2^3(ax)^2$ 5

$= 32 + 5\times 16ax + 10\times 8a^2x^2$ 5

$= 32 + 80ax + 80a^2x^2$

$(4-5x)(2+ax)^5 = 4(2+ax)^5 - 5x(2+ax)^5$

x^2 සංගුණකය $= 4\times 80a^2 - 5\times 80a$ 5

$4\times 80a^2 - 5\times 80a = -80$, බව දී ඇත. 05

$\therefore\ 4a^2 - 5a + 1 = 0.$

$\therefore\ (4a-1)(a-1) = 0.$

$\therefore\ a = \frac{1}{4}\ or\ a = 1.$ 5

25

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\left((1+x)\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x\right)}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}} = \dfrac{1}{4}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\left((1+x)\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x\right)}{\left(\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 2x} \cdot \frac{(1+x-\cos 2x)}{\left(\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}\right)} \qquad 5$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 2x} \cdot \frac{(1+x-\cos 2x)}{\left(\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{(1+2x)} + \sqrt{1-2x}\right)}{\left(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}\right)} \qquad 5$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{\left(2\sin^2 x + x\right)}{\left[(1+2x) - (1-2x)\right]} \cdot \left(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \left(\frac{2\sin^2 x}{4x} + \frac{1}{4}\right)\left(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}\right) \qquad 5$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} \times 2 \qquad 10$$

$$= \frac{1}{4}.$$

([illegible] 05)

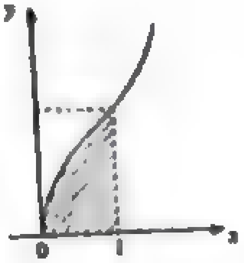
[illegible] 10

[illegible] 5

25

$\frac{d}{dx}\left\{x(x^2+1)\tan^{-1}x\right\} = (3x^2+1)\tan^{-1}x + x$ බව පෙන්වා, $\int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\, dx = \frac{1}{2}(\pi-1)$ බව පෙන්වන්න.

$y = \sqrt{2(3x^2+1)\tan^{-1}x}$, $x = 1$ හා $y = 0$ වලින් සීමා වූ පෙදෙස x-අක්ෂය වටා රේඩියන 2π කින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙසේ ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\pi(\pi-1)$ බව පෙන්වන්න.



$\frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)\tan^{-1}x\right\} = (3x^2+1)\tan^{-1}x + x$ නිසායෙන්

5

$\int_0^1 \left[(3x^2+1)\tan^{-1}x + x\right] dx = x(x^2+1)\tan^{-1}x \Big|_0^1$ බව ලැබේ.

$\therefore \int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\, dx + \int_0^1 x\, dx = 2\tan^{-1}1$

$\therefore \int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\, dx + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 2\frac{\pi}{4}$ 5

$\therefore \int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\, dx = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}(\pi-1).$ 5

අවශ්‍ය පරිමාව $= \pi\int_0^1 2(3x^2+1)\tan^{-1}x\, dx$ 5

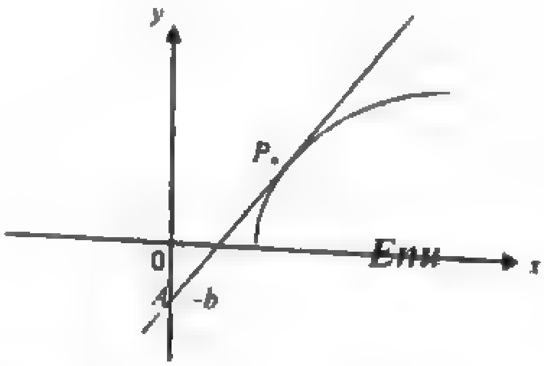
$\pi\int_0^1 y^2\, dx$ - (05)

$= 2\pi\frac{1}{2}(\pi-1)$ 5

$= \pi(\pi-1).$

25

7. $a, b > 0$ යැයි ගනිමු. වක්‍රයක් $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $x = a\sec\theta$ හා $y = b\tan\theta$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලැබේ. වක්‍රය මත $P \equiv (a\sec\theta, b\tan\theta)$ ලක්ෂ්‍යයේදී ඇඳි ස්පර්ශ රේඛාව, $(0, -b)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. P හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$x = a\sec\theta,\qquad y = b\tan\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = a\sec\theta\tan\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = b\sec^2\theta \qquad 5$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{b\sec^2\theta}{a\sec\theta\tan\theta} \qquad 5$$

$$= \frac{b\sec\theta}{a\tan\theta}.$$

AP හි අනුක්‍රමණය $= \dfrac{b + b\tan\theta}{a\sec\theta}$.

දී ඇති තත්ත්වය මගින් $\dfrac{b\sec\theta}{a\tan\theta} = \dfrac{b(1+\tan\theta)}{a\sec\theta}$ වේ. $\quad 5$

$\therefore\ \sec^2\theta = \tan\theta + \tan^2\theta$

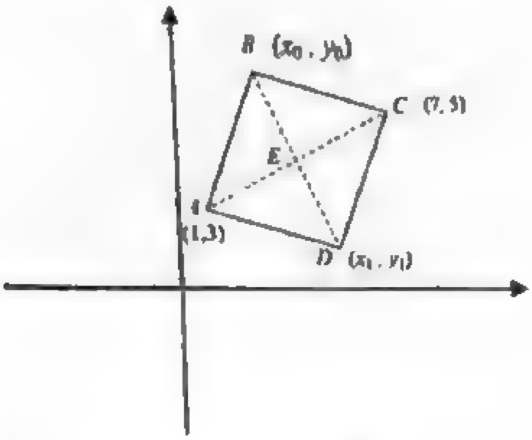
$\therefore\ \tan\theta = 1 \quad 5$

$\therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\ P \equiv \left(\sqrt{2}a,\ b\right) \quad 5$

25

ABCD යනු $A \equiv (1, 3)$ හා $C \equiv (7, 5)$ වන සමචතුරස්‍රයක් යැයි ගනිමු. B හා D හි x-ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$B \equiv (x_0, y_0)$ හා $D \equiv (x_1, y_1)$ යැයි ගනිමු

E යනු AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය බැවින්, $E \equiv (4,4)$ ලැබේ. 5

එවිට, $AE^2 = 3^2+1^2 = 10$

$ABCD$ සමචතුරස්‍රයක් නිසා $BE = AE$ වේ.

ඒ නයින්, $(x_0-4)^2 + (y_0-4)^2 = 10.$ ---------------- (1) 5

තවද, $AE \perp BE$. වේ.

$$\therefore \left(\frac{4-3}{4-1}\right)\times\left(\frac{y_0-4}{x_0-4}\right) = -1.$$

ඒ නයින්, $y_0 - 4 = -3(x_0-4)$ ------------- (2) 5

(1) සහ (2) $\Rightarrow (x_0-4)^2 + 9(x_0-4)^2 = 10.$ 5

ඒ නයින්, $y_0 - 4 = -3(x_0-4).$

$\therefore\ (x_0-4)^2 = 1.$

$\therefore\ (x_0-4) = \pm 1.$

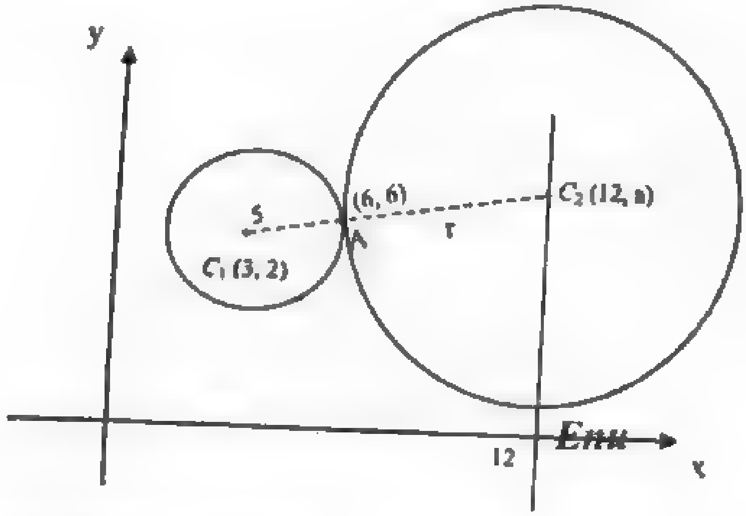
$\therefore\ x_0 = 5$ or $x_0 = 3.$ 5

(x_1, y_1) ද (1) සහ (2) හි (x_0, y_0) යන්න (x_1, y_1) මගින්

ඒ නයින් B සහ D හි X-ඛණ්ඩාංකය 3 හා 5 වේ. තෘප්ත කරයි.

25

9. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ වෘත්තය (6, 6) ලක්ෂ්‍යයේදී බාහිරව ස්පර්ශ කරන හා $x = 12$ රේඛාව මත කේන්ද්‍රය පිහිටන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.



දී ඇති වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය C_1 හා අවශ්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය C_2 යැයි ගනිමු.

එවිට $C_1 \equiv (3,2)$, $C_2 \equiv (12,a)$; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ 5

C_2 වෘත්ත බාහිරව ස්පර්ශ කරන බැවින් C ලක්ෂ්‍යය C_1A රේඛාව මත පිහිටයි.

$\therefore \dfrac{6-2}{6-3} = \dfrac{a-6}{12-6}$. 5

$\therefore 3a - 18 = 24$.

$\therefore a = 14$. 5

S(6,6) = 0
([illegible])

අවශ්‍ය වෘත්තයේ අරය $C_2 = \sqrt{(12-6)^2 + (14-6)^2}$ 5

ගත්

$= 10$

ඒ නයින්, අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $(x-12)^2 + (y-14)^2 = 100$ වේ. 5

$r_2 = 10$, $C_2 = (\overset{+9}{12}, \overset{+8}{14})$

$10 = \sqrt{12^2 + 14^2 - c}$

$c = 260$

25

වෘත්තයේ සමී: [illegible] $\Rightarrow x^2 + y^2 - 24x - 28y + 240 = 0$

Enu

$\cos 5\theta = \cos 3\theta$ වන්නේ $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta = \frac{n\pi}{4}$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

$n \in \mathbb{Z}$ සහ $\theta \neq \frac{n\pi}{4}$ සඳහා $\frac{\sin 5\theta - \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = -\cot 4\theta$ බව ද පෙන්වන්න.

$\cos 5\theta = \cos 3\theta$

$\Leftrightarrow \quad 5\theta = 2n\pi \pm 3\theta$ for $n \in \mathbb{Z}$. 5

$\Leftrightarrow \quad 8\theta = 2n\pi$ or $2\theta = 2n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{n\pi}{4}$ or $\theta = n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$.

Enu

$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{n\pi}{4}$ for $n \in \mathbb{Z}$. 5

$$\frac{\sin 5\theta - \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = \frac{2\cos 4\theta \sin\theta}{-2\sin 4\theta \sin\theta}$$ 5 5

$$= -\cot 4\theta$$ 5

$\cos 5\theta - \cos 3\theta = 0$

$-2\sin 4\theta \cdot \sin\theta = 0$

$\sin 4\theta = 0$ $\quad$ $\sin\theta = 0$

$\sin 4\theta = \sin 2\pi$ $\quad$ $\sin\theta = \sin\pi$

$4\theta = n\pi + (-1)^n$ $\quad$ $\theta = n\pi + (-1)$

$\theta = \frac{n\pi}{4}$ $\quad$ $\theta = n\pi$

25

B කොටස

* ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11.(a) $0 < |p| < 1$ යැයි ගනිමු. $p^2x^2 - 2x + 1 = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල ඇති බව පෙන්වා, එම මූල α හා $\beta\ (> \alpha)$ යැයි ගනිමු. α හා β යන දෙකම ධන වන බව පෙන්වන්න.

p ඇසුරෙන් $(\alpha - 1)(\beta - 1)$ සොයා, $\alpha < 1$ හා $\beta > 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

$\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} = \frac{1}{|p|}\sqrt{2(1+|p|)}$ බව දී ඇත. $|\sqrt{\alpha} - 1|$ හා $|\sqrt{\beta} - 1|$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය

$|p|x^2 - \sqrt{2(1-|p|)}\,x + \sqrt{2(1+|p|)} - |p| - 1 = 0$ බව පෙන්වන්න.

(b) $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 4$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. $(x + 2)$ යන්න $p(x)$ හා $p'(x)$ යන දෙකෙහිම සාධකයක් බව දී ඇත. මෙහි $p'(x)$ යනු x විෂයයෙන් $p(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය වේ. a හා b හි අගයන් සොයා, a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා $p(x) - 3p'(x)$ සම්පූර්ණයෙන් සාධකවලට වෙන් කරන්න.

(a)

$0 < |p| < 1.$

$p^2x^2 - 2x + 1 = 0$ හි නිශ්චායකය Δ යැයි ගනිමු.

$p^2 < 1$ නිසා $\Delta = 4 - 4p^2 = 4(1 - p^2) > 0$

5 5

∴ සමීකරණයට ප්‍රභින්න තාත්ත්වික මූල ඇත. 5

15

α හා $\beta\ (> \alpha)$ එහි මූල යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha\beta = \dfrac{1}{p^2} > 0.$ 5

(α+β) හා αβ [illegible] 05

α හා β යන දෙකම ධන හෝ දෙකම සෘණ වේ.

තවද $\alpha + \beta = \dfrac{2}{p^2} > 0$ නිසා α හා β යන දෙකම ධන වේ. 5

5

15

$(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1 = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{2}{p^2} + 1 = \dfrac{p^2-1}{p^2} < 0$ හා $\alpha - 1 < \beta - 1.$

5 5 5

$\therefore \alpha - 1 < 0$ හා $\beta - 1 > 0.$ 5

$\therefore\ \alpha < 1$ හා $\beta > 1.$

20

$$(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=\frac{2}{p^2}-2\frac{1}{|p|}=\frac{2}{p^2}(1-|p|).$$

5 (ප්‍රසාරණය) 5 (ආදේශ කිරීම)

$$\therefore \sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=\frac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}$$ 5

$\boxed{15}$

අවශ්‍ය සමීකරණය $\left(x-\left|\sqrt{\alpha}-1\right|\right)\left(x-\left|\sqrt{\beta}-1\right|\right)=0$ වේ. 10

$$x^2-\left(\left|\sqrt{\alpha}-1\right|+\left|\sqrt{\beta}-1\right|\right)x+\left|\sqrt{\alpha}-1\right|\left|\sqrt{\beta}-1\right|=0$$

$\left|\sqrt{\alpha}-1\right|=1-\sqrt{\alpha}$ හා $\left|\sqrt{\beta}-1\right|=\sqrt{\beta}-1$ නිසා,

$$x^2-(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})x+\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha\beta}-1=0$$ 5

$$\therefore\ x^2-\frac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}\,x+\frac{1}{|p|}\sqrt{2(1+|p|}-\frac{1}{|p|}-1=0$$

$$\therefore |p|x^2-\sqrt{2(1-|p|}\,x+\sqrt{2(1+|p|}-|p|-1=0$$ 5

$\boxed{20}$

(b) $p(x)=2x^3+ax^2+bx-4$

$\therefore p'(x)=6x^2+2ax+b.$ 5

$(x+2)$ යන්න, $p(x)$ හි සාධකයක් වන නිසා

$p(-2)=0$ වේ. 5

දැන්, $p(-2)=-16+4a-2b-4=0.$ 5

$\therefore\ 2a-b=10$ ---------------- (1)

$(x+2)$ යන්න, $p'(x)$ හි සාධකයක් වන නිසා

$p'(-2)=0.$ 5

දැන්, $p'(-2)=24-4a+b=0.$ 5

$\therefore 4a-b=24.$ ---------------- (2)

(1) හා (2) $\Rightarrow a=7$ හා $b=4.$

5 5

35

$$p(x)-3p'(x)=(2x^3+7x^2+4x-4)-3(6x^2+14x+4) \quad 5$$

$$=(x+2)(2x^2+3x-2)-3(x+2)(6x+2) \quad 5$$

$$=(x+2)\left[2x^2+3x-2-18x-6\right]$$

$$=(x+2)\ (2x^2-15x-8) \quad 5$$

$$=(x+2)(2x+1)(x-8)$$

5 5 5

30

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$p(x)=2x^3+ax^2+bx-4$$

$(x+2)$ යන්න, $p(x)$ හි හා $p'(x)$ යන දෙකෙහිම සාධකයක් වන නිසා,

$p(x)=(x+2)^2(2x+k).$ 5 මෙහි k නියතයකි.

10

නියත පද සංසන්දනය කිරීමෙන් $4k=-4$

$\therefore k=-1$ 5

$\therefore p(x)=(x+2)^2(2x-1).$

$\therefore p(x)=(x^2+4x+4)(2x-1)=2x^3+7x^2+4x-4.$ 5

x හි බලවල සංගුණක සංසන්දනය කිරීමෙන් $b=4$ හා $a=7.$

5 5

35

$\therefore p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$

$\therefore p'(x) = 6x^2 + 14x + 4 = 2(3x^2 + 7x + 2) = 2(x+2)(3x+1)$ 5

$\therefore p(x) - 3p'(x) = (x+2)^2(2x-1) - 3(2(x+2)(3x+1))$ 5

$= (x+2)[(x+2)(2x-1) - 6(3x+1)]$

$= (x+2)(2x^2 - 15x - 8)$ 5

$= (x+2)(2x+1)(x-8)$ 5

5 5

30

13.(a) [illegible]

(i) [illegible]

(ii) [illegible]

(iii) [illegible]

[illegible]

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ [illegible] $U_r = \dfrac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$ [illegible] $r \in \mathbb{Z}^+$ [illegible] $f(r) = \dfrac{A}{(2r+1)} + \dfrac{B}{(2r+3)}$ [illegible] A [illegible] B [illegible] $r \in \mathbb{Z}^+$ [illegible] $U_r = f(r) - f(r+1)$ [illegible] A [illegible] B [illegible]

[illegible] $n \in \mathbb{Z}^+$ [illegible] $\sum\limits_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{4}{3} - \dfrac{3}{2n+3} + \dfrac{1}{2n+5}$ [illegible]

$\sum\limits_{r=1}^{\infty} U_r$ [illegible]

[illegible] $\sum\limits^{\infty} (U_r + kU_{r+1}) = 1$ [illegible] k [illegible]

(a) (i)

සිසුන් දෙදෙනෙක්		සිසුන් හයදෙනෙක්
2M 2OR		4M 2OR
$^{8}C_2$	x	$^{6}C_4 \times {}^{2}C_2$
2OR 2M		4M 2OR
$^{8}C_2$	2	$^{6}C_4 \times {}^{2}C_2$

5 5 5

පිළිතුර $2 \times {}^{8}C_2 \times {}^{6}C_4 \times {}^{2}C_2$

$= 2 \times \dfrac{8!}{6!2!} \times \dfrac{6!}{4!2!} = 2 \times 28 \times 15 = 840$ 5

5

25

(ii) එක් සිසුවෙක් | සිසුන් හත්දෙනෙක්

3M | 3M 4OR

$^8C_1 \quad \times \quad ^7C_3 \times {}^4C_4$

5

පිළිතුර: $^8C_1 \times {}^7C_3 \times {}^4C_4 = 8 \times 4\frac{7!}{4!3!} = 8 \times 35 = 280$

5 5

15

(iii) පළතුරු 3ක්: $\underbrace{3M + 3OR \quad 2M + 1OR \quad 1M + 2OR}_{\text{අවස්ථා 4 ක්}}$ 5

3M (ii) හි පරිදි විධි 280 යි

3OR $\quad {}^8c_1 \times {}^7c_6 \times {}^1c_1 = 8 \times 7 = 56$ 5

^nC_r ප්‍රකාශය භාවිතා කර ඇත්නම් 05 ✓

2M + 1OR $\quad {}^8c_1 \times {}^7c_4 \times {}^3c_3 = 8 \times 35 = 280$ 5

1M + 2OR $\quad {}^8c_1 \times {}^7c_5 \times {}^2c_2 = 8 \times 21 = 168$ 5

පිළිතුර $= 280 + 56 + 280 + 168$

$= 784$ 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

(a) අඹ 6 යි. දොඩම් 4යි. සිසුන් 8යි.

(i) එක් සිසුවෙකුට අඹ දෙකකුත් තවත් සිසුවෙකුට දොඩම් දෙකකුත් දෙන නිසා ඉතිරි සිසුන් 6 දෙනාට අඹ හතරකුත් දොඩම් දෙකකුත් ඉතිරිව ඇත.

						2Ma	2Or

සිසුන් 6

සිසුන් 6 දෙනෙකු අතර අඹ 4ක් හා දොඩම් 2ක්, පළතුරු එක බැගින් බෙදා දිය හැකි ක්‍රම ගණන

$= \frac{6!}{4!2!}$ 10

$^6C_2 \rightarrow 05$ ✓

$\frac{6!}{4!2!} \rightarrow 05$ ✓

5 සිසුන් 8 දෙනෙකු අතරින් එක් සිසුවෙකු තෝරා අඹ 2ක් දිය හැකි විධි ගණන $= {}^8C_1$

සිසුන් 7 දෙනෙකු අතරින් එක් සිසුවෙකු තෝරා දොඩම් 2ක් දිය හැකි විධි ගණන $= {}^7C_1$

පිළිතුර $= \dfrac{6!}{4!2!} \times {}^8C_1 \times {}^7C_1$ 5

$= 840$ 5

හෝ

$$= \frac{6!}{4!2!} \times {}^8P_2$$

$$= 840$$

25

(ii) එක් සිසුවෙකුට අඹ 3කුත් අනෙක් සිසුන් 7 දෙනාට එක පළතුර බැගිනුත්:

							3Ma

සිසුන් 7 දෙනෙකු අතර අඹ 3ක් හා දොඩම් 4ක්, පළතුරු එක බැගින් බෙදා දිය හැකි ක්‍රම ගණන

$$= \frac{7!}{4!3!}$$

සිසුන් 8 දෙනෙකු අතරින් එක් සිසුවෙකු තෝරා අඹ 3ක් දිය හැකි විධි ගණන $= {}^8C_1$

$\therefore$ පිළිතුර $= {}^8C_1 \times \dfrac{7!}{4!3!}$

$= 280$

(iii)

පළතුරු 3 ක් එක් සිසුවෙකුට		පළතුරු 7 ක් සිසුන් 7 දෙනාට		විධි ගණන	
අඹ	දොඩම්	අඹ	දොඩම්		
3	0	3	4	$= {}^8C_1 \times \dfrac{7!}{3!4!} = 280$	5
2	1	4	3	$= {}^8C_1 \times \dfrac{7!}{4!3!} = 280$	5
1	2	5	2	$= {}^8C_1 \times \dfrac{7!}{5!2!} = 168$	5
0	3	6	1	$= {}^8C_1 \times \dfrac{7!}{6!} = 56$	5

මුළු විධි ගණන

$= 280 + 280 + 168 + 56$

$= 784$ 5

25

Enu

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$

$$U_r = \frac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$$

$$U_r = f(r) - f(r+1)$$

$$\frac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)} = \frac{A}{2r+1} + \frac{B}{2r+3} - \frac{A}{2r+3} - \frac{B}{2r+5} \quad 5$$

$$\therefore 4(2r+7) = A(2r+3)(2r+5) + (B-A)(2r+1)(2r+5) - B(2r+1)(2r+3)$$

$$= (4A+4B)r + 10A + 2B$$

ඕනෑම ක්‍රමයක් 10

r හි බල සංසන්දනය කිරීමෙන්

$$\left.\begin{array}{ll} r: & 8 = 4A+4B \Rightarrow 2 = A+B \\ r^0: & 28 = 10A+2B \Rightarrow 14 = 5A+B \end{array}\right\} A=3, \quad B=-1 \quad 5 \quad 5$$

$\boxed{25}$

Enu

$U_r = f(r) - f(r+1)$ මෙහි $f(r) = \dfrac{3}{2r+1} - \dfrac{1}{2r+3}$ 5

$r=1;\ U_1 = f(1) - f(2)$

$r=2;\ U_2 = f(2) - f(3)$ 5

. .

. .

. .

$r=n-1;\ U_{n-1} = f(n-1) - f(n)$

$r=n;\ U_n = f(n) - f(n+1)$ 5

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1) \quad 5$$

A සහ B [illegible]
[illegible] (25)

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1)$$

5 [illegible]

$$= 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5}$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} \quad 5 \quad r \in \mathbb{Z}$$

[illegible]

$\boxed{30}$

Enu

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r \quad 5$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} \right)$$

$$= \frac{4}{5} \quad 5$$

∴ එබැවින් $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ යන අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන අතර එහි ඓක්‍යය $\frac{4}{5}$ වේ. 5

15

$$1 = \sum_{r=1}^{\infty} (U_r + kU_{r+1})$$

$$= (1+k)\left(\sum_{r=1}^{\infty} U_r \right) - kU_1 \quad 5$$

$$= (1+k)\left(\frac{4}{5} \right) - k\left(\frac{12}{35} \right) \quad 5$$

$$k = \frac{7}{16} \quad 5$$

15

11. (a) $A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. සියලු $a \in \mathbb{R}$ සඳහා A^{-1} පවතින බව පෙන්වන්න.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ හා $R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ යැයි ද $A = PQ^T + R$ බව ද දී ඇත. $a = 1$ බව පෙන්වන්න.

a හි මෙම අගය සඳහා, A^{-1} ලියා දක්වා, එ නයින්, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ වන පරිදි x හා y හි අගයන් සොයන්න.

(b) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $z\bar{z} = |z|^2$ බව පෙන්වා එ නයින්, $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$ බව අපෝහනය කර, ජ්‍යාමිතික ව, z, w හා 0 ශීර්ෂ ලෙස ඇති ත්‍රිකෝණය ... [illegible]

(c) $z = -1 + \sqrt{3}i$ යැයි ගනිමු. z යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ වේ.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $z^n = a_n + ib_n$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ වේ. $m, n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\mathrm{Re}\left(z^m \cdot z^n\right)$ යන්න a_m, a_n, b_m හා b_n ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

z^{m+n} සලකමින් හා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් $m, n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $a_m a_n - b_m b_n = 2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(a) සියලු $a \in \mathbb{R}$ සඳහා $|A| = a(a+2) + 2 = a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 \neq 0$.

5

සියලු $a \in \mathbb{R}$ සඳහා A^{-1} පවතී. 5

15

$$A = PQ^T + R$$

5

$$\begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$ 5

5

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$ 5

$a = 1$ හා $a + 2 = 3$. $\therefore a = 1$ 5

25

$a = 1$ විට $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad 10$$

(05) (05)

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 10$$

(on error)

5 5

on, error ×

$x = 1$ හා $y = 3$ වේ.

30

(b) $x, y \in \mathbb{R}$ සඳහා $z = x + iy$ ලෙස ගනිමු

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

5 5

10

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} \quad 5$$

$$= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \quad 5$$

$$= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \quad 5$$

$$= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|$$

$$= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \quad 5 \quad \text{------------ (i)}$$

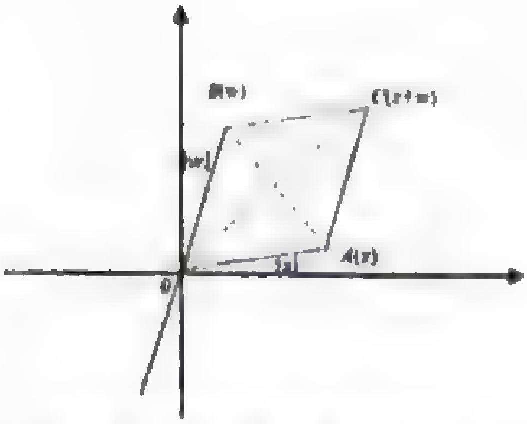
20

(i) හි w වෙනුවට $-w$ මඟින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්

$$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \quad 5 \quad \text{------------ (ii)}$$

$\therefore$ (i) හා (ii) න්

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right). \quad 5$$



z, w හා 0 ඒක රේඛීය නොවේනම් එවිට $OC^2 + AB^2 = 2\left(OA^2 + OB^2\right)$.

$\left(\because OC = |z + w| \text{ හා } AB = |z + w|.\right)$

සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණයන්හි වර්ගවල එකතුව එහි පාදවල වර්ගවල එකතුවට සමාන වේ.

5 $\qquad$ $\boxed{15}$

(c) $\quad z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ $\quad$ 10

5

එනම් $r = 2$ හා $\theta = \frac{2\pi}{3}$ වේ. $\qquad$ $\boxed{15}$

5

$\text{Re}(z^m z^n) = \text{Re}\left[(a_m + ib_m)(a_n + ib_n)\right] = a_m a_n - b_m b_n$ ---------- (1) $\qquad$ $\boxed{05}$

---

5 $\qquad$ 5

$$z^m z^n = z^{m+n} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{m+n} = 2^{m+n}\left[\cos\frac{2(m+n)\pi}{3} + i\sin\frac{2(m+n)\pi}{3}\right]$$

$\therefore \text{Re}(z^m z^n) = 2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}$ ------------------ (2)

5

(1) හා (2) $\Rightarrow a_m a_n - b_m b_n = 2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}$. $\qquad$ $\boxed{15}$

14.(a) $x \neq -2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x+2)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq -2$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{-2(x+1)}{(x+2)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

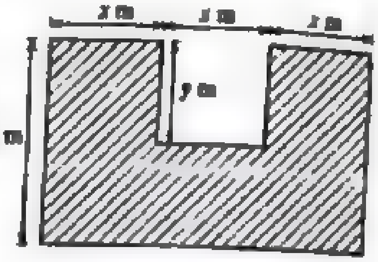
$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq -2$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{2(2x+1)}{(x+2)^4}$ බව දී ඇත. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$[k, \infty)$ මත $f(x)$ එකට-එක වන k හි කුඩාතම අගය ලියා දක්වන්න.

(b) රූපයේ අඳුරු කර ඇති ආස්තර පෙදෙසක වර්ගඵලය $45\ m^2$ වේ. එය ලබා ගෙන ඇත්තේ දිග $3x$ m හා පළල $2y$ m වූ සෘජුකෝණාස්‍රයකින්, දිග x m හා පළල y m වූ සෘජුකෝණාස්‍රයක් ඉවත් කිරීමෙනි. අඳුරු කළ පෙදෙසේ පරිමිතිය L m යන්න $x > 0$ සඳහා $L = 6x + \dfrac{54}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. L අවම වන x හි අගය සොයන්න.



(a) $x \neq -2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x+2)^2}$.

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2(2) - 2(2x+3)(x+2)}{(x+2)^4}$$

(05) (05) (05) 20 (05)

$$= \frac{2(x+2)[x+2-2x-3]}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{-2(x+1)}{(x+2)^3}$$ (5)

25

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (5)

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(−) (05)	(+)	(−) (05)
$f(x)$	අඩු වේ ↘	වැඩි වේ ↗	අඩු වේ ↘
	5	5	05

$\therefore$ $(-2,-1]$ මත $f(x)$ වැඩි වේ. හා

$\therefore$ $(-\infty,-2)$ මත $[-1,\infty)$ $f(x)$ අඩු වේ.

20

හැරවුම් ලක්ෂය: $(-1,1)$ ස්ථානීය උපරිමයක් වේ 5 5

10

$$f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(x+2)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}.$$ 5

	$-2 < x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < \infty$
$f''(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$
	යටි අවතල	උඩු අවතල

5 5

$\therefore \left(\frac{-1}{2}, \frac{8}{9}\right)$ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය වේ 5

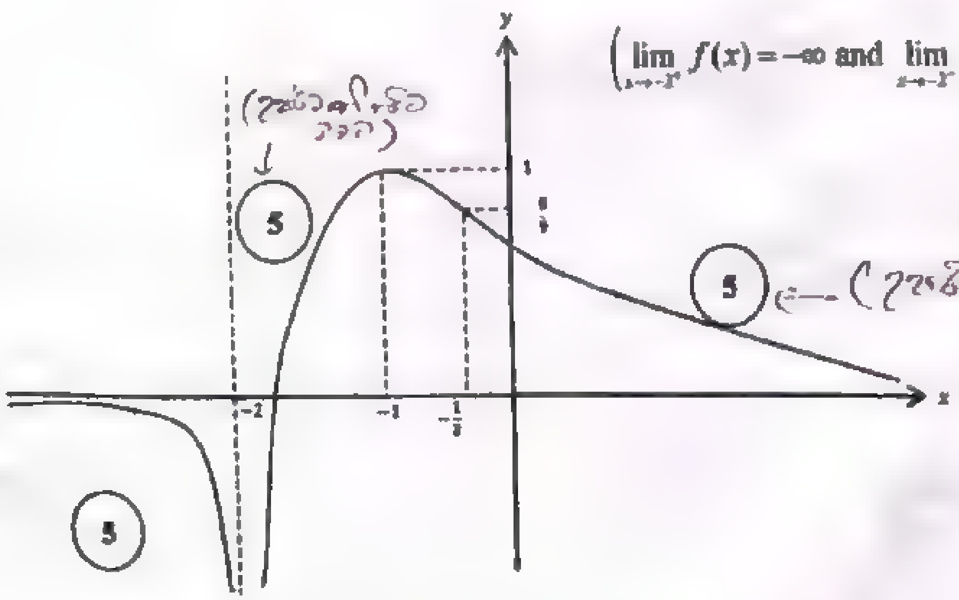
තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ $\therefore y = 0$ 5

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $x = -2$ 5

05

05

$\left(\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \text{ and } \lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty\right)$



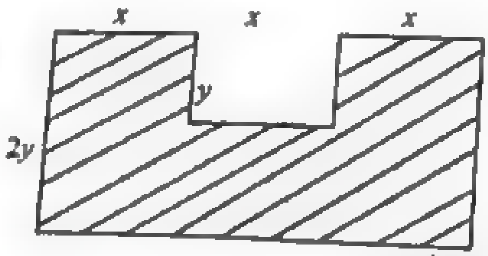
55

----

k හි කුඩාම අගය $k = -1$ වේ. 5

05

(b)



for $x > 0, \quad y > 0$

5 5

අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $45 = (3x)(2y) - xy$

$\therefore \quad 45 = 5xy$

$\therefore \quad y = \dfrac{9}{x}$ 5

$L = 6x + 6y$ 10

$= 6x + \dfrac{54}{x} \quad \text{for } x > 0$ 5

$\dfrac{dL}{dx} = 6 - \dfrac{54}{x^2} = \dfrac{6(x^2 - 9)}{x^2} = \dfrac{6(x-3)(x+3)}{x^2}$

5

$\dfrac{dL}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$ 5

$0 < x < 3$ සඳහා $\dfrac{dL}{dx} < 0$ හා

$x > 3$ සඳහා $\dfrac{dL}{dx} > 0$ වේ

$\therefore x = 3$ දී L අවම වේ. 5

45

Enu

15.(a) [illegible] $x \in \mathbb{R}$ [illegible] $x^2 + x + 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$ [illegible] A, B [illegible] C [illegible]

[illegible] $\dfrac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}$ [illegible] $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}\,dx$ [illegible]

(b) $1 + \sin 2x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ [illegible] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin 2x}\,dx = 1$ [illegible]

(c) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 \cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}\,dx$ [illegible] $I = -\frac{\pi^2}{8} + J$ [illegible]

[illegible] $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx$.

$\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ [illegible] (b) [illegible] J [illegible]

$I = \frac{\pi}{8}(2 - \pi)$ [illegible]

a)

$$x^2 + x + 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$
$$= (A + B)x^2 + (A + B + C)x + A + C$$

x [illegible]

$x^0: \quad 2 = A + C$

$x: \quad 1 = A + B + C$ 5

$x^2: \quad 1 = A + B$

$\therefore A = 2, \quad B = -1 \quad and \quad C = 0.$ 5

5 5

20

Enu

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)} = \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2+x+1}$$ 5

$$\therefore \int \frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}\,dx = 2\int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$$ 5

Enu

Enu

$$= 2\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$ 5 5 5

$$-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{(x+\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$ 5 5 5

$x^2+x+1>0$

$$|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + C,$$ මෙහි C නියතයකි

Error

$\boxed{40}$

(*b*)

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)^2$$

$$= (\cos x + \sin x)^2$$ 5

$$= 1 + 2\sin x\cos x$$ 5

$$= 1 + \sin 2x$$ 5

$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$2\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right]^2$

$2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right]^2$

$\frac{2}{2}\left[\cos x + \sin x\right]^2$

$\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x$

$1+\sin 2x$

$1+\sin 2x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$RHS = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$= 1+\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$= 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

$= 1+\sin 2x$

$\boxed{15}$

Enu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\,dx$$ 5

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$$ 5

$$= \frac{-1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$ 5

$$= \frac{-1}{2}\left(\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) - \tan\frac{\pi}{4}\right)$$ 5

$1+\sin 2x$

$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x$

$(\sin x + \cos x)^2$

$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)^2$

$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

Enu

$$= \frac{-1}{2}(-1-1)$$

$$= 1 \quad 5$$

25

(C) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}\,dx$$

$$= \underbrace{x^2\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{1+\sin 2x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{5} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx}_{5} \quad 5$$

$$= \frac{-1}{2}\times\frac{\pi^2}{4}\times\frac{1}{1+0} \; 5 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx$$

$$= \frac{-\pi^2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx$$

$$= \frac{-\pi^2}{8} + J. \quad 5$$

25

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\underbrace{1+\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{\sin 2x}}\,dx \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{x}{1+\sin 2x}}_{J}\,dx \quad 5$$

$$\therefore 2J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{1+\sin 2x}}_{1}\,dx \quad 5 \quad (2J)$$

$$\therefore J = \frac{\pi}{4} \quad 5$$

$$\therefore I = \frac{-\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}(2-\pi) \quad 5$$

25

---

16. $P \equiv (x_0, y_0)$ හා l යනු $ax + by + c = 0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. P සිට l ට ඇති ලම්බ දුර $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ බව පෙන්වන්න.

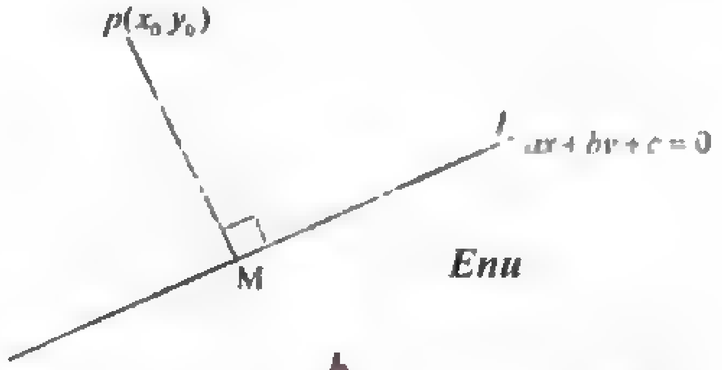
l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින්, $4x - 3y + 8 = 0$ හා $3x - 4y + 13 = 0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු.

l_1 හා l_2, $A \equiv (1, 4)$ හිදී ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකයේ පරාමිතික සමීකරණ $x = t$ හා $y = t + 3$ ලෙස ලිවිය හැකි බව ද පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$.

එ නයින්, l_1 හා l_2 සරල රේඛා දෙකම ස්පර්ශ කරන, l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණය අඩංගු වන පෙදෙසෙහි පවතින ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය $(x-t)^2 + (y-t-3)^2 = \frac{1}{25}(t-1)^2$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ හා $t \neq 1$.

දුන් වෘත්ත අතුරින්, කේන්ද්‍රය A වන හා අරය 1 වන වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.



Here $a^2 + b^2 \neq 0$

$\frac{b}{a}$

PM හි සමීකරණය $(y - y_0) = \frac{a}{b}(x - x_0)$ වේ   5

P හරහා l ට ලම්බ රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක්

$t \in \mathbb{R}$ සඳහා $(x_0 + at, y_0 + bt)$ ලෙස ලිවිය හැකිය.   5

M, l මත පිහිටයි $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$ 5

$\therefore t(a^2 + b^2) = -ax_0 + by_0 + c$

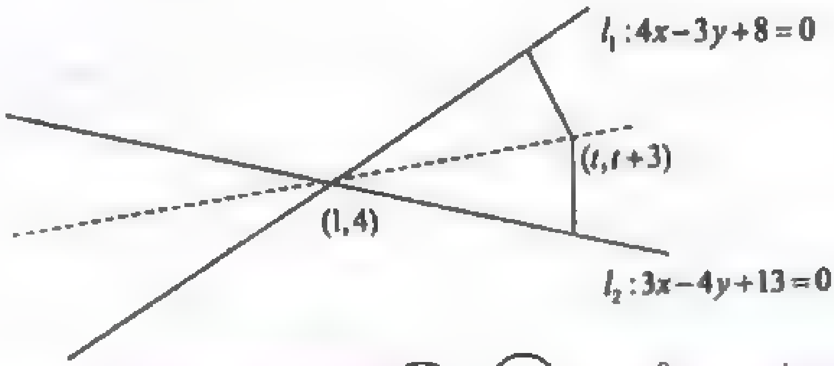
$\therefore \quad t = \frac{-(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}$ 5

∴ අවශ්‍ය දුර $PM=\sqrt{a^2t^2+b^2t^2}$ (5)

$=\sqrt{a^2+b^2}\,|t|$

$=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (5)

30



l_1 නිවැරදිව ඇඳීමට (5) (5) l_2 නිවැරදිව ඇඳීමට

A හි ඛණ්ඩාංක l_1, සහ l_2 හි ආදේශයෙන් අපට l_1, සහ l_2 රේඛා $A=(1,4)$ හිදී ඡේදනය වේ. (5)

15

$\dfrac{4x-3y+8}{5}=\pm\dfrac{3x-4y+13}{5}$ මගින් කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ දෙනු ලැබේ (10)

කෝණයේ සමච්ඡේදක $\underbrace{x+y-5}_{m=-1}=0$ සහ $x-y+3=0$ වේ. (5) (5)

θ යනු l_1 සහ $x_1+y-5=0$ අතර සුළු කෝණය යැයි ගනිමු.

එවිට $\tan\theta=\left|\dfrac{\frac{4}{3}-(-1)}{1+\frac{4}{3}(-1)}\right|=7>1$ (5)

(10) (5)

∴ සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකය $x-y+3=0$ වේ. (5)

එය පරාමිතිකව ගත හැක් වේ.

$t \in \mathbb{R}$ සඳහා $x = t$ ලෙස ගනිමු. 5

එවිට $y = x + 3 = t + 3$. 5

55

අවශ්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය සුළු කෝණ සමච්ඡේදකය මත පිහිටිය යුතුය.

5

$\therefore$ කේන්ද්‍රය $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $(t, t+3)$ ආකාරයෙන් විය යුතුය

$$\text{අරය} = \frac{|4t - 3(t+3) + 8|}{5} = \left|\frac{t-1}{5}\right|$$ 5 5

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය 5

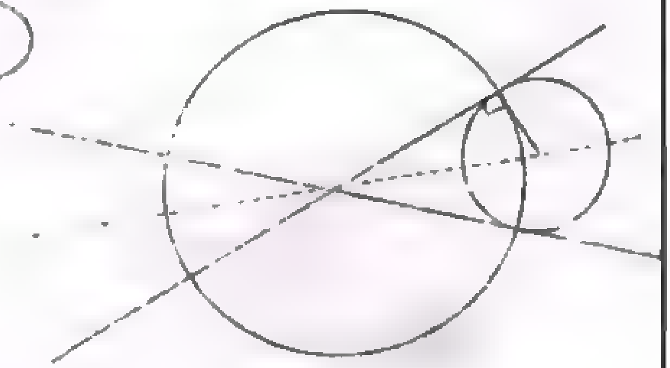
$$(x-t)^2 + (y-(t+3))^2 = \tfrac{1}{25}(t-1)^2$$

$$(x-t)^2 + (y-t-3)^2 = \tfrac{1}{25}(t-1)^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

20

ප්‍රලම්බව ඡේදනය වන වෘත්ත සඳහා පයිතගරස් ප්‍රමේය යෙදීමෙන්

$$(t-1)^2 + (t+3-4)^2 = 1^2 + \frac{1}{25}(t-1)^2$$ 10



$$(t-1)^2 = \frac{25}{49}$$

$$\Rightarrow t-1 = \frac{5}{7} \quad \text{or} \quad t-1 = \frac{-5}{7}$$

5 5

$$\therefore \quad t = \frac{12}{7} \quad \text{or} \quad t = \frac{2}{7}$$

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තවල සමීකරණ:

$$\left(x - \frac{12}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{33}{7}\right)^2 = \frac{1}{25}\left(\frac{12}{7} - 1\right)^2 \qquad \left(t = \frac{12}{7}\right)$$

$$(7x-12)^2 + (7y-33)^2 = 1$$ 5

$$\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\left(y-\frac{23}{7}\right)^2=\frac{1}{25}\left(\frac{2}{7}-1\right)^2 \qquad \left(t=\frac{2}{7}\right)$$

$$(7x-2)^2+(7y-23)^2=1$$ 5

$\boxed{30}$

Enu

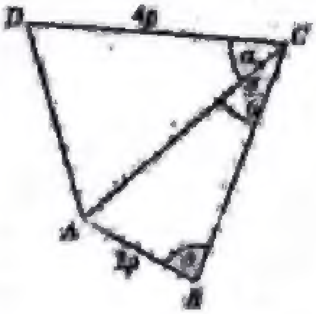
17. (a) $\cos A$, $\cos B$, $\sin A$ [illegible] $\sin B$ [illegible] $\cos(A+B)$ [illegible], $\sin(A-B)$ [illegible]

$k \in \mathbb{R}$ [illegible] $k \neq 1$ [illegible] $k>1$ [illegible] $k<1$ [illegible], $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ [illegible] $R\cos(\theta+\alpha)$ [illegible] $R(>0)$ [illegible] $\alpha\ (0<\alpha<2\pi)$ [illegible]

[illegible], $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=|k-1|$ [illegible]

(b) [illegible] $ABCD$ [illegible] $AB=2p$, $CD=4p$, $B\hat{C}A=\frac{\pi}{6}$ [illegible] $A\hat{B}C=A\hat{C}D=\alpha$ [illegible] $AD^2=16p^2(\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1)$ [illegible]

[illegible], $AD=4p$ [illegible] $\alpha=\tan^{-1}(2)$ [illegible]



(c) $x>1$ [illegible] $\tan^{-1}(\ln x^{[illegible]})+\tan^{-1}(\ln x)+\tan^{-1}(\ln x^2)=\frac{\pi}{2}$ [illegible]

(a) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ 5

sin (A-B) [illegible] 03

$\sin(A-B)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(A-B)\right)$ 5

$=\cos\left((\frac{\pi}{2}-A)+B\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos B-\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\sin B$ 5

$=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ 5

20

Enu

$2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ 5 5

$=2k\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)+2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=k\left(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)+\left(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right)$ 5

$=(k-1)\left(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)$

$=2(k-1)\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$ 5

$=2(k-1)\cos(\theta+\beta)$ where $\beta=\frac{\pi}{3}$

5

Enu

$k>1$ විට $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2(k-1)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$;

එවිට $R=2(k-1)$ හා $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 5

$k<1$ විට $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2(1-k)\cos\left(\pi+\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=2(1-k)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$$

එවිට $R=2(1-k)$ හා $\alpha=\frac{4\pi}{3}$. 5

35

$2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=|k-1|$

$k>1$ විට

$2(k-1)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=k-1$

$\therefore \cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ 5

$\Rightarrow \theta+\frac{\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3} \quad n\in\mathbb{Z}$

$\therefore \quad \theta=2n\pi-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}\ n\in\mathbb{Z}.$ 5

$k<1$ විට

$2(1-k)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=1-k$ 5

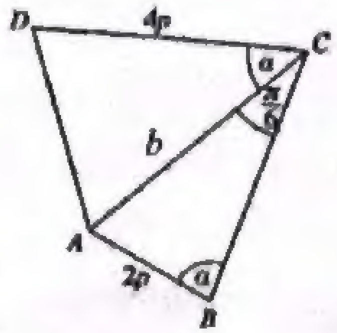
$\therefore \quad \cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$\theta+\frac{4\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\, n\in\mathbb{Z}.$

$\therefore \quad \theta=2n\pi-\frac{4\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}\, n\in\mathbb{Z}.$ 5

20

(*b*) ABC ත්‍රිකෝණයට සයින් සූත්‍රය :



10

$$\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{2p}{\sin\frac{\pi}{6}}\Rightarrow b=4p\sin\alpha \quad 5$$

ACD ත්‍රිකෝණයට කෝසයින් සූත්‍රය :

$$AD^2=b^2+(4p)^2-2b(4p)\cos\alpha \quad 10$$

$$=16p^2\sin^2\alpha+16p^2-2(4p)^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=16p^2(\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1) \quad 5$$

30

$AD=4p$, නම්.

$\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1=1$

$\sin\alpha(\sin\alpha-2\cos\alpha)=0$ 5

නමුත් $\sin\alpha\neq 0$ $\sin\alpha=2\cos\alpha$ 5

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$ $\cos\alpha\neq 0$

$\therefore$ $\tan\alpha=2$ and $\alpha=\tan^{-1}(2)$. 5

15

$AD^2=16p^2(\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1)$

$16p^2=16p^2(\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1)$

(c)

$x > 1:$

$$\underbrace{\tan^{-1}\left(\ln x^{2/3}\right)}_{\alpha}+\underbrace{\tan^{-1}(\ln x)}_{\beta}+\underbrace{\tan^{-1}\left(\ln x^{2}\right)}_{\theta}=\frac{\pi}{2}$$

$$\beta+\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha \quad 5$$

$\alpha+\beta+\theta=\frac{\pi}{2}$ ✓ 05

$$\tan(\beta+\theta)=\cot b\alpha \quad 5$$

$$\frac{\tan\beta+\tan\theta}{1-\tan\beta\tan\theta}=\frac{1}{\tan\alpha} \quad 5$$

$$\therefore \quad \frac{\ln x+\ln x^{2}}{1-\ln x\ln x^{2}}=\frac{1}{\ln x^{\frac{2}{3}}} \quad 5$$

$$\frac{\ln x^{3}}{1-2(\ln x)^{2}}=\frac{1}{\frac{2}{3}\ln x}$$

$t=\ln x \Rightarrow$

$$3\times\frac{2}{3}t^{2}=1-2t^{2} \quad 5$$

Enu

$$4t^{2}=1$$

$$\ln x=t=\frac{1}{2} \qquad \left(\because t\neq\frac{-1}{2}\ ;\ \ t=\ln x \text{ and } x>1\right)$$

$$\therefore \qquad x=e^{\frac{1}{2}} \quad 5$$

සත්‍යාපනය

30

$$\tan^{-1}\left\{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}+\tan^{-1}\left(\ln e^{\frac{1}{2}}\right)+\tan^{-1}(\ln e)\doteq\frac{\pi}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \qquad \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\frac{1}{2}}}\doteq\frac{\pi}{4}.$$

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}$$

$$=1$$